

NOCIONES DE PRECÁLCULO

Autores

Hugo Javier Arbeláez P.

John Bayron Baena G.

Eddy Alejandro Bustamante M.

Beatriz Elena Correa R.

Bibiana López R.

Jorge Enrique Mejía L.

Luz Elena Muñoz S.

Mauricio Andrés Osorio L.

Carlos Augusto Vélez L.

ESCUELA DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

Tabla de Contenido

Lección	Página
1 Ángulos y triángulos I	1
Conceptos básicos	1
Otros conceptos básicos	1
Ángulos	2
Medida de ángulos	2
Relaciones entre ángulos	3
Ángulos entre rectas	4
Teorema de las paralelas	4
Triángulos	5
2 Triángulos II y semejanza de triángulos	9
Clasificación de triángulos	9
Conceptos y resultados importantes	10
Semejanza de triángulos	10
Teorema de Thales	11
Criterio A-A (Ángulo-Ángulo)	11
3 Figuras planas, teorema de Pitágoras y cuerpos geométricos	17
Área y perímetro de figuras planas	17
Perímetro y área de algunas figuras planas	18
Teorema de Pitágoras	22
Volumen y área superficial de sólidos	22
Volumen y área superficial de algunos sólidos	23
4 Nociones sobre conjuntos, intervalos y valor absoluto	27
Nociones sobre conjuntos	27
Sistemas numéricos	27
Operaciones entre conjuntos	30
Intervalos	31
Valor absoluto	34
Propiedades del valor absoluto	35
5 Potenciación y radicación	39
Exponentes enteros	39
Propiedades de los exponentes enteros	40
Exponentes racionales	43
Propiedades	44
6 Expresiones algebraicas	47

	Página
Suma de polinomios	47
Producto o multiplicación de polinomios	48
División de Polinomios	48
7 Factorización	53
Productos notables	53
Interpretación geométrica	54
Factorización	55
8 Factorización y simplificación de expresiones algebraicas	59
Factorización II	59
Expresiones fraccionarias	60
Operaciones con fracciones	60
9 Expresiones fraccionarias (continuación)	63
Fracciones compuestas	63
Racionalización	64
10 Funciones	67
Función	67
Evaluación de una función	68
Determinación del dominio de una función	69
Gráfica de una función	70
Prueba de la recta vertical	71
Algunas funciones básicas y sus gráficas	71
11 Ecuaciones I: Ecuaciones lineales, ecuaciones cuadráticas	75
Definición	75
Ecuaciones lineales	76
Ecuaciones cuadráticas y de orden superior	77
12 Ecuaciones II: Otros tipos de ecuaciones. La circunferencia	83
Otros tipos de ecuaciones	83
La circunferencia	86
13 Sistemas de ecuaciones lineales 2x2	89
Sistemas de Ecuaciones Lineales en dos Variables	89
Método de sustitución	90
Método de eliminación	91
Casos especiales	92
14 Modelado mediante ecuaciones	95
15 Desigualdades	101
Desigualdades lineales	102
Desigualdades no lineales	103

16	Ángulos	109
	Medida de ángulos	109
	Ángulos coterminales	110
	Ángulo de referencia	112
17	Funciones trigonométricas, aplicaciones a triángulos rectángulos	115
	Funciones trigonométricas de ángulos	115
	Aplicaciones a triángulos rectángulos	119
18	Leyes de seno y coseno	123
	Ley de seno	123
	Ley de coseno	127
19	Identidades trigonométricas	131
	Identidades trigonométricas fundamentales	131
	Demostración de identidades trigonométricas	132
	¿Cómo probar que una Ecuación es una Identidad?	132
	Otras identidades trigonométricas importantes	134
20	Ecuaciones trigonométricas	139
	Definición	139
	Talleres	144
	Taller 1: Lecciones 1 y 2	145
	Taller 2: Lecciones 3 y 4	150
	Taller 3: Lecciones 5 y 6	154
	Taller 4: Lecciones 7 y 8	156
	Taller 5: Lecciones 9 y 10	157
	Taller 6: Lecciones 11 y 12	159
	Taller 7: Lecciones 13 y 14	160
	Taller 8: Lecciones 15 y 16	161
	Taller 9: Lecciones 17 y 18	162
	Taller 10: Lecciones 19 y 20	164
	Bibliografía	167

Prefacio

Mejorar la enseñanza de las Matemáticas siempre es un reto. Los conceptos matemáticos llevan en sí mismos cierta complejidad, pero si le sumamos a ésta un texto demasiado denso, con terminología extraña y que no distinga qué es lo verdaderamente importante a enseñar, el resultado termina siendo catastrófico.

El presente texto de 20 lecciones ha sido escrito para un curso de formación de docentes en Precálculo y hace parte de una versión completa de 90 lecciones de Precálculo, que serían utilizadas como guías de clase por los maestros del departamento de Antioquia en el grado once de la educación secundaria. Este trabajo ha sido elaborado dentro del programa “Antioquia la más Educada”, liderado por el Gobernador Sergio Fajardo Valderrama, y su objetivo es hacer una exposición lo más clara posible de las nociones matemáticas básicas que deberían ser conocidas por un bachiller antes de su ingreso a la universidad. Para ello hemos reducido la terminología matemática a la estrictamente necesaria y hemos prescindido de temas accesorios, que consideramos no son esenciales para la formación matemática de los estudiantes y que por el contrario pueden despertar en ellos un rechazo al estudio de las Matemáticas. De esta manera esperamos que este material contribuya a mejorar la percepción, entre los estudiantes, de la importancia de las Matemáticas y de su inmenso poder en la solución de problemas concretos, tanto de las ciencias naturales como de la vida cotidiana.

Comité Editorial

Prólogo

En nuestra experiencia como profesores universitarios, hemos observado que los temas de matemáticas necesarios para el estudio de cálculo no son comprendidos por nuestros estudiantes. Motivados por la anterior consideración queremos dedicar este cursillo de Precálculo al estudio de algunos de estos temas.

Comenzamos el cursillo repasando conceptos básicos de Geometría. A continuación recordamos las nociones básicas de conjuntos, números reales, intervalos, valor absoluto y algunas de sus propiedades. Posteriormente se estudian temas de Álgebra, se introduce el concepto de función y se presentan algunos ejemplos elementales. Así mismo se resuelven problemas de modelado mediante ecuaciones y desigualdades. Finalmente se repasan los conceptos y técnicas elementales de Trigonometría. Debido a que este no es un curso regular para un año lectivo escolar, en estos apuntes no se alcanza a profundizar en aspectos como las gráficas de funciones, funciones definidas por tramos, funciones polinomiales, etcétera.

Estas notas fueron inicialmente preparadas por los profesores Hugo Arbeláez, Eddye Bustamante, Beatriz Correa y Luz Elena Muñoz. Recientemente, el profesor John Bayron Baena introdujo cambios en el formato de los archivos que facilitaron enormemente la preparación del presente cursillo.

Finalmente queremos expresar que el presente texto, que sirve para el cursillo y está enmarcado en el *Plan de mejoramiento de la enseñanza y apropiación de las Matemáticas en los colegios de Antioquia*, puede ser usado en el futuro como material de apoyo para cursos de matemáticas dictados por los maestros del departamento.

Los autores

Ángulos y triángulos I

Conceptos básicos

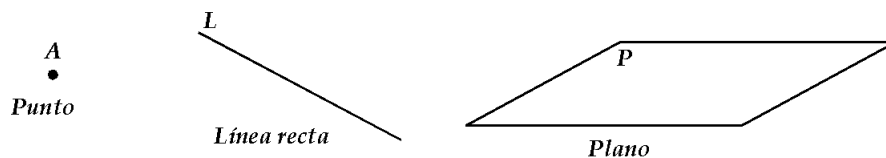


Figura 1.1

- Por dos puntos distintos pasa una y sólo una línea recta.
- Se dice que tres puntos distintos son **colineales** si están sobre una misma línea recta.

Otros conceptos básicos

Si L es una línea recta y A y B son dos puntos distintos sobre ella, podemos hablar también de la recta AB .

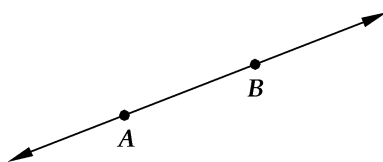


Figura 1.2

Llamamos **segmento** $\overline{AB}$ y **rayo** $\overrightarrow{AB}$ (o semirecta $\overrightarrow{AB}$, o rayo R) a los siguientes conjuntos:

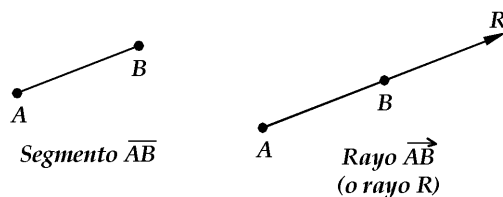


Figura 1.3

Los segmentos se miden en unidades de longitud. Decimos que dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes si tienen la misma longitud y en este caso escribimos $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Ángulos

Un ángulo es la abertura formada por dos rayos (o semirectas) que tienen un extremo común. En realidad, dos rayos R_1 y R_2 que tienen un extremo común O dan lugar a dos ángulos (α y β), como se puede ver en la figura. Sin embargo, cuando no se da una explicación complementaria, en esta situación nos referimos al ángulo de menor abertura (α). Cada uno de los rayos R_1 y R_2 se denomina **lado del ángulo** y el extremo común O se conoce como **vértice del ángulo**.

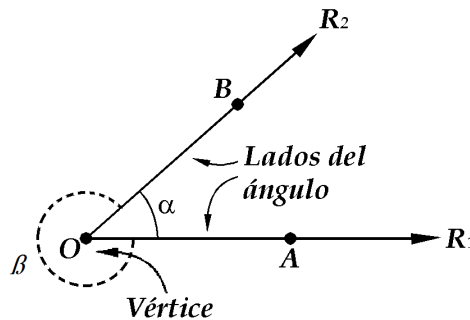


Figura 1.4

Lo denotamos por $\angle AOB$ ó por $\angle BOA$, por una letra griega $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, por un número $1, 2, 3, \dots$ ó por una letra minúscula $a, b, c, \dots$

Cuando los rayos R_1 y R_2 coinciden tenemos un ángulo nulo y un ángulo que corresponde a una rotación completa alrededor del vértice O .

Medida de ángulos

Medir un ángulo es compararlo con otro que se toma como unidad. Consideremos una circunferencia de centro O dividida en 360 partes iguales. Un ángulo mide un grado, y escribimos 1° , si al situar su vértice en O , sus lados cortan dos divisiones consecutivas de la circunferencia. De acuerdo con esta definición de medida de ángulo, el ángulo que corresponde a una rotación completa alrededor del vértice O mide 360° .

Un ángulo se puede clasificar según su medida en los siguientes tipos:

- **Ángulo agudo:** es el que mide menos de 90° .
- **Ángulo recto:** es el que mide exactamente 90° .
- **Ángulo obtuso:** es el que mide más de 90° y menos de 180° .
- **Ángulo llano:** es el que mide 180° .

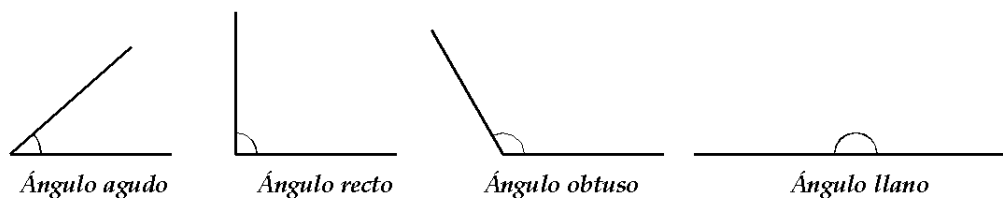


Figura 1.5

Relaciones entre ángulos

- **Ángulos congruentes**: decimos que dos ángulos son **congruentes** si tienen la misma medida. Si α y β son congruentes, escribimos $\alpha \cong \beta$.

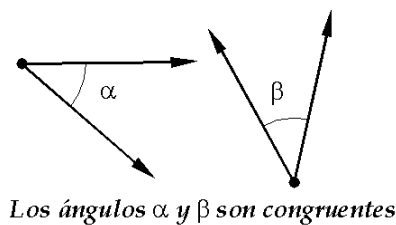


Figura 1.6

- **Ángulos complementarios**: decimos que dos ángulos son **complementarios** si la suma de sus medidas es 90° .
- **Ángulos suplementarios**: decimos que dos ángulos son **suplementarios** si la suma de sus medidas es 180° .
- **Ángulos adyacentes**: decimos que dos ángulos son **adyacentes** si tienen el mismo vértice y un lado común.

Ejemplo 1.1

En la siguiente figura los ángulos $\angle AOC$ y $\angle BOC$ son adyacentes y suplementarios.

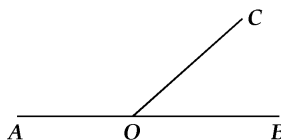


Figura 1.7

Se dice que dos rectas L_1 y L_2 en el plano que tienen un **único punto en común**, se interceptan (o intersecan) en dicho punto. Si no tienen algún punto en común se dice que L_1 y L_2 son **paralelas**, y escribimos $L_1 \parallel L_2$. Si L_1 y L_2 tienen todos los puntos comunes se llaman **coincidentes**.

Si dos rectas L_1 y L_2 se interceptan formando un **ángulo recto** se dice que son **perpendiculares**, y en dicho caso escribimos $L_1 \perp L_2$.

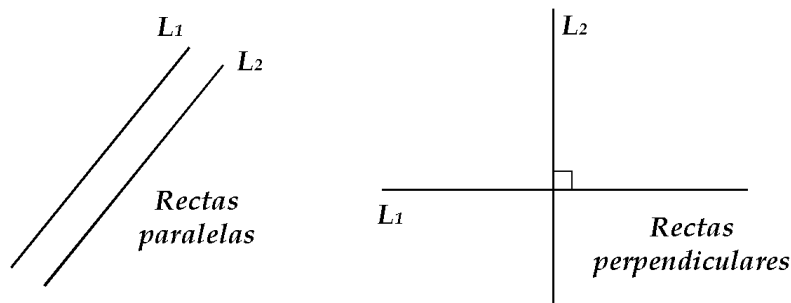


Figura 1.8

Ángulos entre rectas

Cuando dos rectas son intersecadas por una línea transversal, que llamaremos secante, se forman 8 ángulos, así:

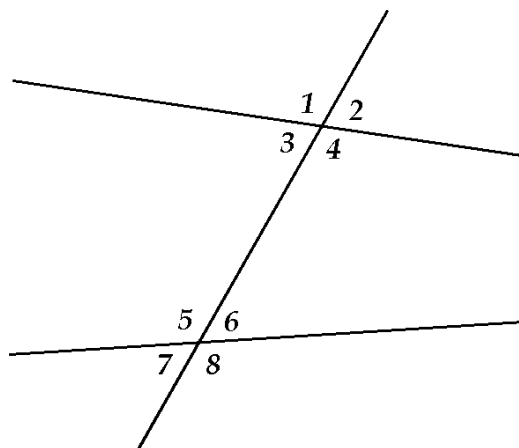


Figura 1.9

- Ángulos alternos externos: “1 y 8” y “2 y 7”.
- Ángulos alternos internos: “3 y 6” y “4 y 5”.
- Ángulos correspondientes: “1 y 5”, “2 y 6”, “3 y 7” y “4 y 8”.
- Ángulos opuestos por el vértice: “1 y 4”, “2 y 3”, “5 y 8”. y “6 y 7”.

Teorema de las paralelas

Si las dos rectas de la definición anterior (Figura 1.9) son paralelas, entonces los pares de ángulos mencionados arriba son congruentes.

Ejemplo 1.2

Si L_1 y L_2 son rectas paralelas y $c = 45^\circ$ y $m = 60^\circ$, encuentre la medida de los ángulos restantes.

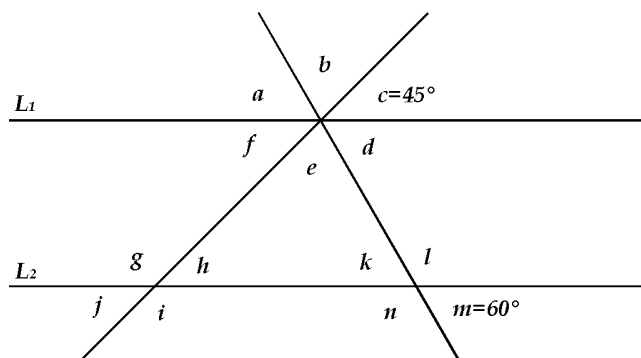


Figura 1.10

Solución

$a = 60^\circ$ (porque a es alterno externo con $m = 60^\circ$).

$b = 75^\circ$ (porque $a + b + c = 180^\circ$, $a = 60^\circ$ y $c = 45^\circ$).

$d = 60^\circ$ (porque d es opuesto por el vértice con $a = 60^\circ$).

$e = 75^\circ$ (porque e es opuesto por el vértice con $b = 75^\circ$).

$f = 45^\circ$ (porque f es opuesto por el vértice con $c = 45^\circ$).

$g = 135^\circ$ (porque g es alterno interno con $d + e = 135^\circ$).

$h = 45^\circ$ (porque h es suplemento de $g = 135^\circ$).

$i = 135^\circ$ (porque i es opuesto por el vértice con $g = 135^\circ$).

$j = 45^\circ$ (porque j es opuesto por el vértice con $h = 45^\circ$).

$k = 60^\circ$ (porque k es opuesto por el vértice con $m = 60^\circ$).

$l = 120^\circ$ (porque l es suplemento de $m = 60^\circ$).

$n = 120^\circ$ (porque n es opuesto por el vértice con $l = 120^\circ$).

Triángulos

Dados tres puntos no colineales A , B y C , se llama **triángulo** ABC , y se denota por $\triangle ABC$, a la región del plano limitada por los segmentos de recta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$. Los puntos A , B y C se denominan **vértices** del triángulo y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se llaman **lados** del triángulo.

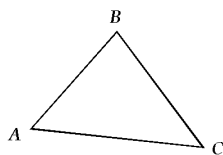


Figura 1.11

En el triángulo $\triangle ABC$ de la Figura 1.12, los ángulos $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$ se llaman **ángulos interiores o internos** del triángulo y los ángulos $\angle 4$, $\angle 5$ y $\angle 6$ se llaman **ángulos exteriores o externos** del triángulo.

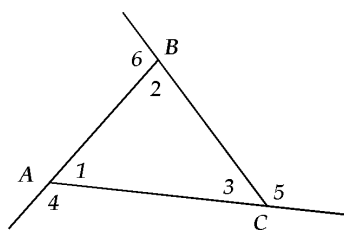


Figura 1.12

Algunos conceptos y resultados importantes

- La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180° .
- En un triángulo la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos interiores no adyacentes a él.
- La base de un triángulo es cualquiera de sus lados.
- **Altura:** cada una de las rectas que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto, o a su prolongación.
- **Mediana:** cada una de las rectas que pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto.
- **Mediatriz:** cada una de las rectas perpendiculares que pasan por el punto medio de cada lado.
- **Bisectriz:** cada una de las rectas que dividen sus ángulos en dos ángulos congruentes.

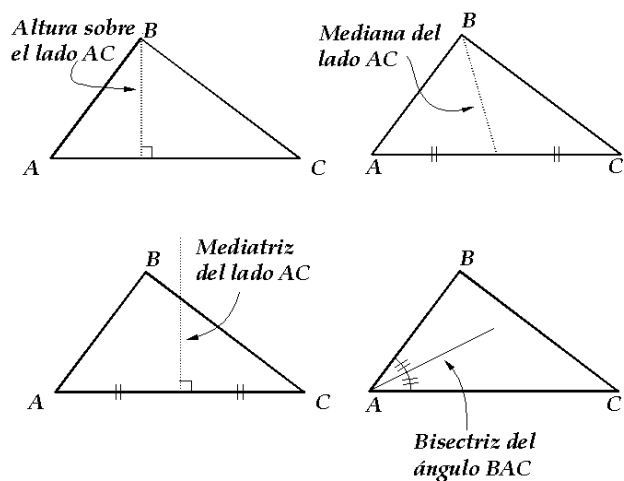


Figura 1.13

Ejemplo 1.3

Determine los valores de x y y .

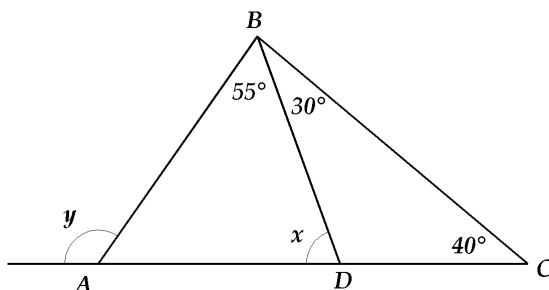


Figura 1.14

Solución

La suma de los ángulos interiores de $\triangle BDC$ es 180° , por lo tanto, el $\angle BDC$ mide $180^\circ - (30^\circ + 40^\circ) = 110^\circ$. Ahora, como $x + 110^\circ = 180^\circ$, entonces $x = 70^\circ$. Como el ángulo y es externo al $\triangle ABD$, $y = 70^\circ + 55^\circ = 125^\circ$.

Ejercicios

1. Encuentre el valor de x :

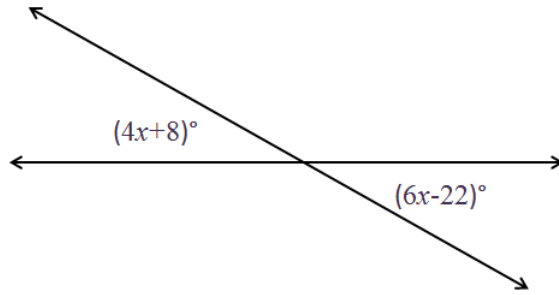


Figura 1.15

2. Si L_1 y L_2 son rectas paralelas y $b = 30^\circ$, ¿cuál es la medida de los ángulos restantes?.

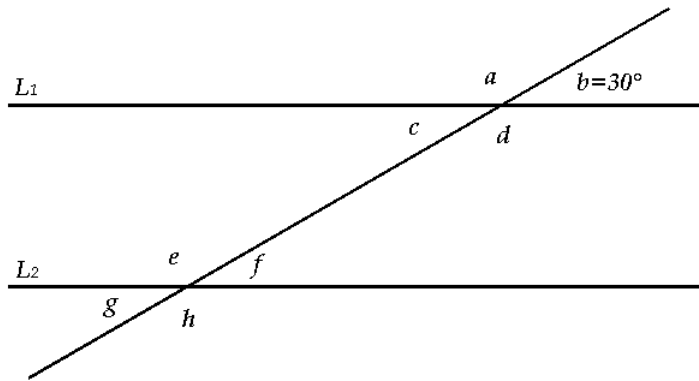


Figura 1.16

3. Si L_1 y L_2 son paralelas, encuentre los valores de x y de y :

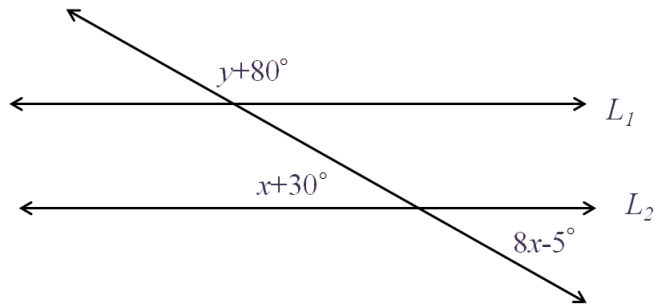


Figura 1.17

Triángulos II y semejanza de triángulos

Clasificación de triángulos

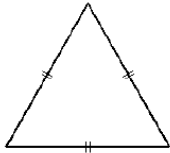
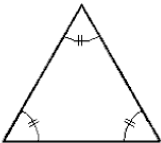
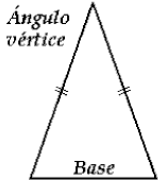
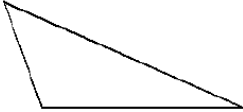
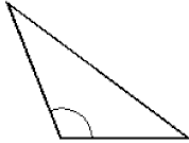
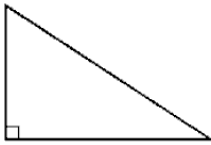
SEGÚN LA MEDIDA DE SUS LADOS		SEGÚN LA MEDIDA DE SUS ÁNGULOS	
Equilátero		Equiángulo	
	3 lados congruentes		3 ángulos internos congruentes
Isósceles		Acutángulo	
	2 lados congruentes		3 ángulos internos agudos
Escaleno		Obtusángulo	
	Ningún par de lados congruentes		1 ángulo interno obtuso
		Rectángulo	
			1 ángulo interno recto

Figura 2.1

Conceptos y resultados importantes

- En un triángulo isósceles el ángulo comprendido entre los dos lados congruentes se llama ángulo vértice.
- En un triángulo isósceles se suele llamar base al lado opuesto al ángulo vértice.
- Si un triángulo ABC es isósceles entonces los ángulos de la base son congruentes.

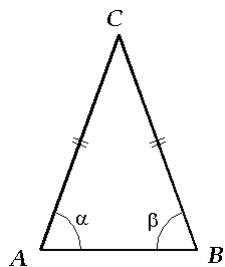


Figura 2.2

Si $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ entonces $\alpha \cong \beta$.

- La bisectriz del ángulo vértice de un triángulo isósceles es también altura, mediana y mediatriz de la base.

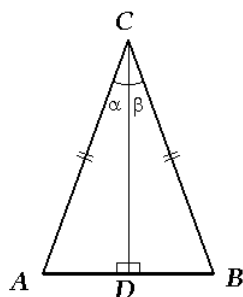


Figura 2.3

Semejanza de triángulos

Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$

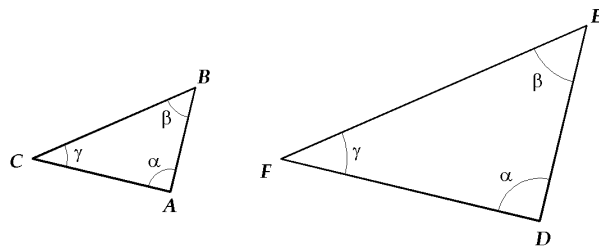


Figura 2.4

son **semejantes** y escribimos $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, si $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$ y

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}.$$

Es decir, dos triángulos son semejantes si sus ángulos interiores son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales. Llamamos lados correspondientes en dos triángulos semejantes a aquellos que se oponen a ángulos congruentes. Dos triángulos semejantes tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño.

Teorema de Thales

Toda recta paralela a un lado de un triángulo y que intercepta los otros dos lados, determina un segundo triángulo semejante al primero.

Si en ΔABC trazamos $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEC$.

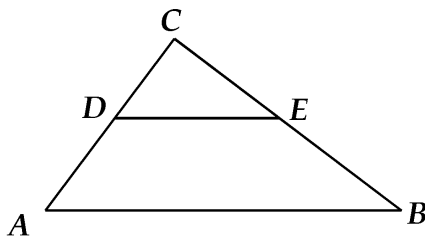


Figura 2.5

Podemos utilizar algunos criterios para probar la semejanza de triángulos sin necesidad de probar la congruencia de todos los ángulos correspondientes y la proporcionalidad de todos los lados correspondientes. Además del Teorema de Thales, el criterio más útil es el siguiente:

Criterio A-A (Ángulo-Ángulo)

Dos triángulos son semejantes si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos del otro triángulo.

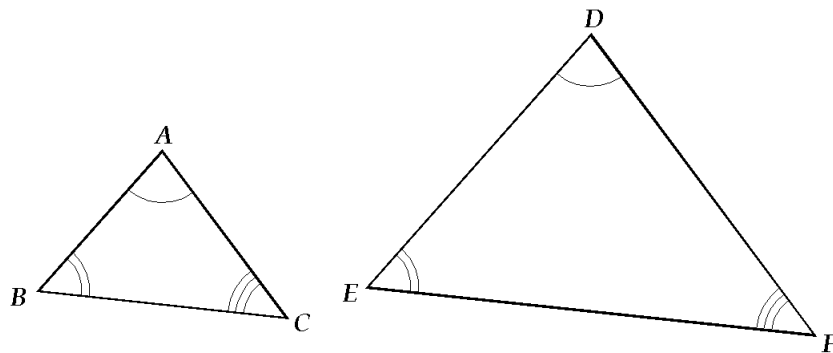


Figura 2.6

En la Figura 2.6, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$. Es claro que también $\angle C \cong \angle F$.

Ejemplo 2.1

Se tiene un tanque en forma de cono recto invertido de 3 m de altura y 2 m de diámetro en la parte superior (ver Figura 2.7). Si el tanque está parcialmente lleno de agua, con 1.8 m desde el vértice hasta la superficie, calcule el radio de la superficie de agua.

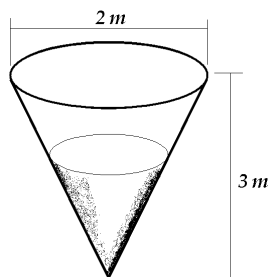


Figura 2.7

Solución

El tanque, visto de frente, tiene la forma de un triángulo isósceles, con su ángulo vértice en la parte inferior y la base en la parte superior. Tracemos la altura de éste y empleemos la nomenclatura que se muestra en la siguiente Figura 2.8.

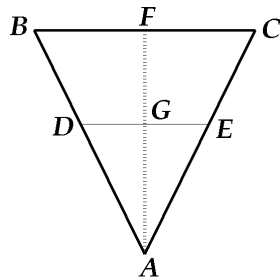


Figura 2.8

Los datos del problema, con la nomenclatura de la Figura 2.8, son los siguientes: $\overline{BC} = 2$ m, $\overline{AF} = 3$ m, $\overline{AG} = 1.8$ m.

Como los segmentos $\overline{FC}$ y $\overline{GE}$ son paralelos, entonces por el Teorema de Thales tenemos que los triángulos $\triangle AFC$ y $\triangle AGE$ son semejantes. Luego, se cumple que

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{GE}}{\overline{FC}},$$

o equivalentemente que

$$\overline{GE} = \frac{\overline{FC} \times \overline{AG}}{\overline{AF}}.$$

Ahora, como el triángulo $\triangle ABC$ es isósceles y el segmento $\overline{AF}$ es altura, entonces $\overline{AF}$ también es mediatriz y así los segmentos $\overline{BF}$ y $\overline{FC}$ son congruentes. Por lo tanto,

$$\overline{FC} \cong \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \text{ m.}$$

Reemplazando todos los valores, tenemos:

$$\overline{GE} = \frac{\overline{FC} \times \overline{AG}}{\overline{AF}} = \frac{1 \times 1.8}{3} = 0.6 \text{ m.}$$

Por lo tanto, el radio de la superficie de agua es 0.6 m.

Ejemplo 2.2

En la Figura 2.9, los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ son paralelos. Si las longitudes de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ son 18, 12 y 10 respectivamente, calcule el valor de x .

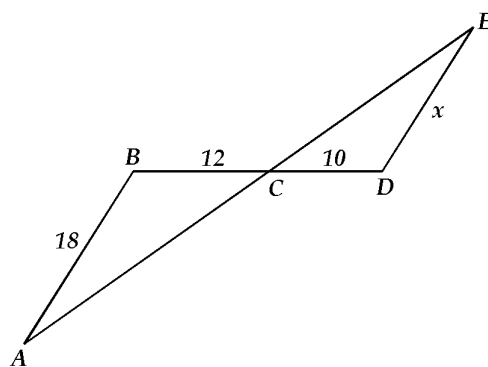


Figura 2.9

Solución

Observemos que $\angle BCA \cong \angle ECD$ por ser opuestos por el vértice, $\angle BAC \cong \angle CED$ por ser alternos internos y que $\angle ABC \cong \angle CDE$ por ser alternos internos.

Tenemos entonces que $\triangle ABC \sim \triangle CED$ ya que los tres ángulos interiores de $\triangle ABC$ son congruentes con los tres ángulos interiores de $\triangle CED$. De esta forma, se cumple que los lados correspondientes son proporcionales, esto es:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{x}$$

$$\frac{12}{10} = \frac{18}{x}.$$

Luego

$$x = \frac{180}{12} = 15.$$

Ejercicios

1. Si L_1 y L_2 son paralelas, encuentre los valores de x y de y :

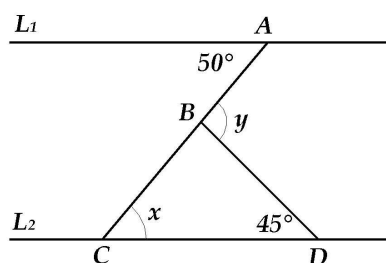


Figura 2.10

2. Halle los valores de x y y :

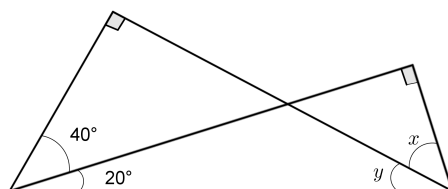


Figura 2.11

3. Dado que $\triangle ACE$ es rectángulo en C , que $\overline{AB} \cong \overline{AF}$ y que $\overline{FE} \cong \overline{DE}$, halle el valor de $\angle BFD$.

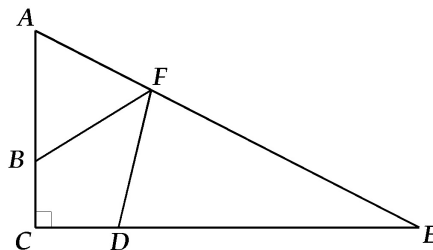


Figura 2.12

4. Sabiendo que $\overline{DE}$ y $\overline{AB}$ son paralelos, determine la longitud del segmento $\overline{CD}$.

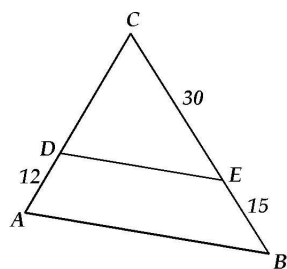


Figura 2.13

Figuras planas, teorema de Pitágoras y cuerpos geométricos

Área y perímetro de figuras planas

Figura Plana: Es una región del plano limitada por una línea cerrada.

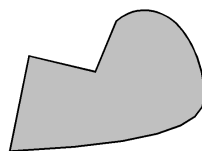


Figura Plana

Figura 3.1

Polígono: Es una figura plana limitada por una línea cerrada, conformada por un número finito de segmentos de recta, llamados **lados del polígono**. Si todos los lados y ángulos interiores de un polígono son congruentes, decimos que el polígono es **regular**.

Los polígonos reciben nombres especiales de acuerdo con el número de lados, así:

No.de lados	Nombre
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
...	...
n	Eneágono

Circunferencia: Es la línea cerrada formada por todos los puntos del plano que equidistan (están a la misma distancia) de un punto fijo llamado **centro**. A la distancia fija la llamamos **radio** de la circunferencia, y la denotamos r .

Círculo: Es una figura plana limitada por una circunferencia.

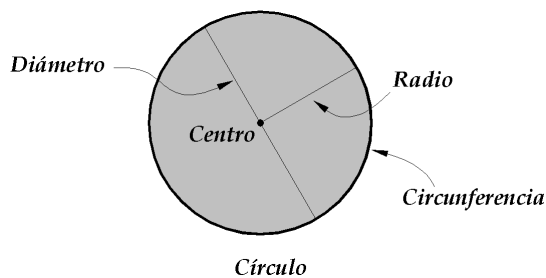


Figura 3.2

Se llama **diámetro** de la circunferencia a todo segmento de recta que une dos puntos sobre la circunferencia y pasa por el centro. Si d es la longitud de un diámetro y r es la longitud del radio, es claro que $d = 2r$.

Perímetro: Es la longitud de la línea cerrada que limita una figura plana. El perímetro se mide en unidades de longitud, como: milímetro [mm], centímetro [cm], metro [m], pies [ft], entre otras.

Área: Es la medida de la superficie limitada por una figura plana. El área se expresa en unidades cuadradas, como: milímetro cuadrado [mm²], centímetro cuadrado [cm²], metro cuadrado [m²], entre otras.

Perímetro y área de algunas figuras planas

1. **Rectángulo:** Es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son congruentes y sus cuatro ángulos internos son rectos.

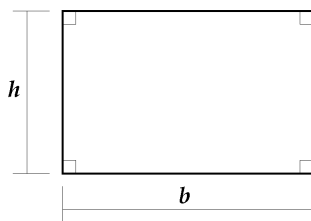


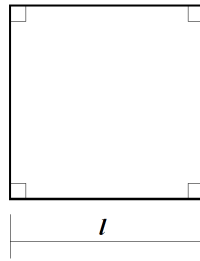
Figura 3.3

b : base
 h : altura

Perímetro:
 $P = 2(b + h)$

Área:
 $A = bh$

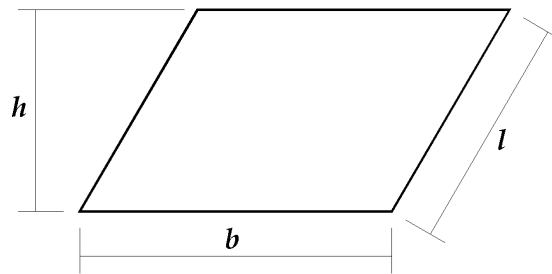
2. **Cuadrado:** Es un cuadrilátero cuyos cuatro lados son congruentes, y sus cuatro ángulos internos son rectos.



l : lado
Perímetro:
 $P = 4l$
Área:
 $A = l^2$

Figura 3.4

3. **Paralelogramo:** Cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.



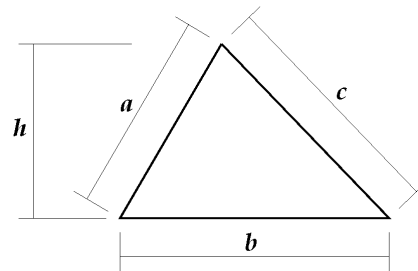
b : base
 h : altura
 l : lado adyacente
 a la base

Figura 3.5

Perímetro: $P = 2(b + l)$

Área: $A = bh$

4. **Triángulo:**



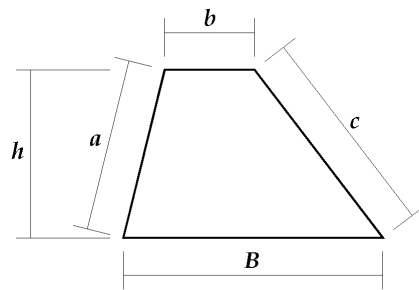
b : base
 h : altura
 a, c : lados

Figura 3.6

Perímetro: $P = a + b + c$

Área: $A = \frac{1}{2}bh$

5. **Trapezio:** Es un cuadrilátero que tiene dos lados opuestos paralelos.



B : base mayor
 b : base menor
 h : altura.
 a, c : otros lados

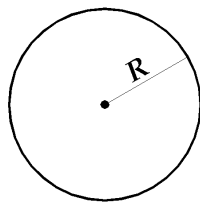
Figura 3.7

Perímetro: $P = a + B + b + c$

Área: $A = \frac{1}{2}(B + b)h$

6. Círculo:

R : radio
 d : diámetro



Longitud de la Circunferencia:

$$C = 2\pi R = \pi d$$

Área del círculo:

$$A = \pi R^2$$

Figura 3.8

Ejemplo 3.1

Se tiene una ventana compuesta de un cuadrado y un semicírculo en la parte superior, como se muestra en la Figura 3.9.

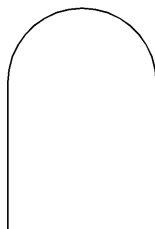


Figura 3.9

Si el perímetro de la ventana es 8 m, ¿qué cantidad de vidrio debemos comprar para cubrir la ventana?

Solución

Sea x la longitud del lado del cuadrado. Entonces, el radio del semicírculo es $\frac{x}{2}$. (Ver Figura 3.10).

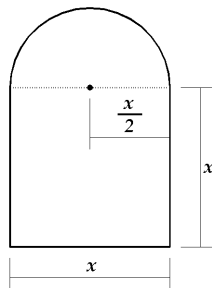


Figura 3.10

Área de la ventana = área del cuadrado + área del semicírculo.

Como el área del cuadrado es x^2 y el área del semicírculo es $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\pi x^2$, entonces el área de la ventana es

$$x^2 \left(1 + \frac{1}{8}\pi\right).$$

Necesitamos calcular el valor de x . Como el perímetro de la ventana es

$$P = 3x + \frac{1}{2} \left[2\pi \left(\frac{x}{2} \right) \right] = 3x + \frac{\pi}{2}x = x \left(3 + \frac{\pi}{2} \right),$$

tenemos que $x \left(3 + \frac{\pi}{2} \right) = 8$, y entonces el valor de x es

$$x = \frac{8 \times 2}{6 + \pi} = \frac{16}{6 + \pi}.$$

Calculemos ahora el área de la ventana

$$A = x^2 \left(1 + \frac{1}{8}\pi \right) = \left(\frac{16}{6 + \pi} \right)^2 \left(\frac{8 + \pi}{8} \right) = 32 \frac{8 + \pi}{(6 + \pi)^2}.$$

Luego, debemos comprar $32 \frac{8 + \pi}{(6 + \pi)^2}$ m² de vidrio para cubrir la ventana.

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos** y el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**.

Si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

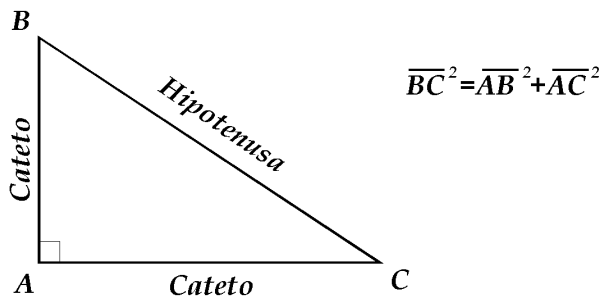


Figura 3.11

Ejemplo 3.2

Pruebe que en un triángulo equilátero de lado a , la altura está dada por

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Solución

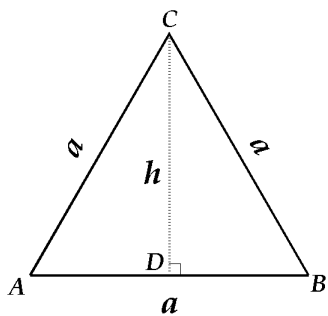


Figura 3.12

En la Figura 3.12, como $\triangle ABC$ es equilátero, el segmento $\overline{CD}$ es mediana y mediatriz. Por lo tanto, usando el Teorema de Pitágoras, tenemos que $a^2 = h^2 + (a/2)^2$. Entonces $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$ y así $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Volumen y área superficial de sólidos

Un **sólido** o **cuerpo geométrico** es una figura geométrica de tres dimensiones: largo, ancho y alto, que ocupa un lugar en el espacio y por lo tanto tiene volumen. Los sólidos o cuerpos geométricos se pueden clasificar en: poliedros y cuerpos redondos.

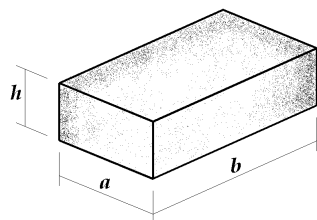
Un **poliedro** es un sólido limitado por polígonos y un **cuerpo redondo** es un sólido que tiene al menos una cara curva.

El **volumen de un sólido** es la medida del espacio que ocupa dicho cuerpo y se mide en unidades cúbicas.

El **área superficial** de un sólido es la suma de las áreas de las figuras que limitan el sólido.

Volumen y área superficial de algunos sólidos

1. **Paralelepípedo Rectangular:** Es un poliedro de 6 caras, cada una de las cuales es un rectángulo.



a : ancho.
 b : largo.
 h : altura.

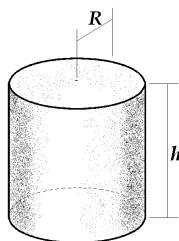
Figura 3.13

Volumen: $V = abh$

Área Superficial: $A = 2ab + 2ah + 2bh$

Un paralelepípedo rectangular es un cubo si $a = b = h$.

2. **Cilindro Circular Recto:** Es un cuerpo redondo limitado por dos círculos congruentes y paralelos llamados bases del cilindro, y por una cara curva que al abrirse es un rectángulo en el cual un lado es la longitud de la circunferencia que encierra el círculo y el otro es la altura del cilindro. Cualquier sección transversal es un círculo paralelo y congruente a las bases.



R : radio de la base.
 h : altura.

Volumen:
 $V = \pi R^2 h$

Área Superficial:
 $A = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$

Figura 3.14

3. **Prisma:** Es un poliedro que tiene dos caras paralelas que son polígonos congruentes (llamados bases) y las demás caras son paralelogramos. Cualquier sección transversal

es un polígono paralelo y congruente a las bases.

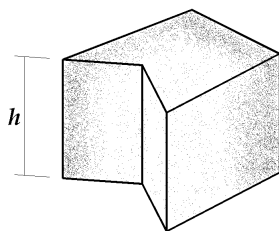


Figura 3.15

B : área de la base.

P : perímetro de la base.

h : altura.

Volumen:

$$V = Bh$$

Área Superficial:

$$A = 2B + Ph$$

4. **Cono Circular Recto:** Es un cuerpo redondo que tiene como base un círculo y su superficie lateral se obtiene al unir un punto exterior, llamado **vértice** del cono, con cada punto de la circunferencia por medio de segmentos de recta. Además, para que el cono sea recto, el segmento de recta que une el vértice del cono con el centro del círculo debe ser perpendicular al círculo.

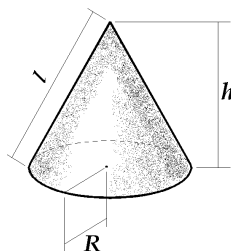


Figura 3.16

R : radio de la base.

h : altura.

Volumen:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Área Superficial:

$$A = \pi Rl + \pi R^2$$

5. **Pirámide:** Es un poliedro que tiene un polígono como base y las demás caras son triángulos que se encuentran en un punto llamado **vértice** de la pirámide.

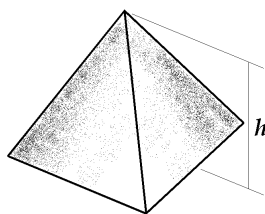


Figura 3.17

B : área de la base.

h : altura.

Volumen:

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

6. **Esfera:** Es el sólido limitado por la superficie cerrada formada por todos los puntos del espacio que equidistan (están a la misma distancia) de un punto fijo llamado **centro**.

A la distancia fija la llamamos **radio** de la esfera y la denotamos por R .

R : radio.

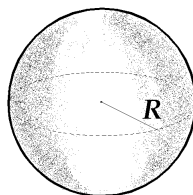


Figura 3.18

Volumen:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Área Superficial:

$$A = 4\pi R^2$$

Ejemplo 3.3

Se va a construir en cemento el sólido que se muestra en la Figura 3.19 compuesto por un cilindro circular recto de 18 cm de altura y 7 cm de radio con 2 semiesferas en sus extremos.

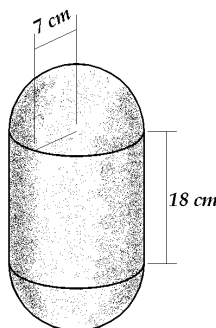


Figura 3.19

¿Cuánto cemento se requiere para la construcción del sólido? Si se quiere proteger el sólido con una lámina de acrílico, ¿qué cantidad de acrílico se necesita?

Solución

El volumen del sólido es igual al volumen del cilindro circular recto más el volumen de dos semiesferas, o equivalentemente, el volumen del cilindro más el volumen de una esfera:

$$V = \pi \cdot 7^2 \cdot 18 + \frac{4}{3}\pi \cdot 7^3 = \frac{4018}{3}\pi \text{ cm}^3.$$

En forma similar, el área superficial es igual al área superficial de dos semiesferas (o de una esfera) más el área superficial de la parte cilíndrica:

$$A = 4\pi \cdot 7^2 + 2\pi \cdot 7 \cdot 18 = 448\pi \text{ cm}^2.$$

Entonces se requieren $\frac{4018}{3}\pi \text{ cm}^3$ para construir el sólido, y $448\pi \text{ cm}^2$ de acrílico para recubrirlo.

Ejercicios

1. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado $2L$. Si desde el centro del cuadrado trazamos una circunferencia completa con radio L y desde cada uno de los vértices trazamos $1/4$ de circunferencia con radio L , como lo muestra la Figura 3.20, calcule el área sombreada.

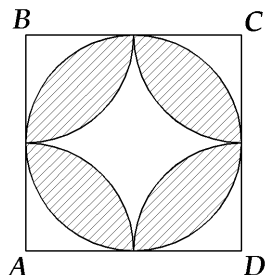


Figura 3.20

2. Considere un envase, con tapas, en forma de un cilindro circular recto de radio R , altura h , volumen V y área superficial A . Encuentre:
 - (a) A en términos de R y V .
 - (b) A en términos de h y V .
3. Se pide recortar en cada uno de los vértices de un cuadrado de lado “ a ”, un triángulo isósceles del mismo tamaño, de modo que el perímetro del octágono resultante sea los tres cuartos del perímetro del cuadrado. ¿Cuál será la magnitud de los lados iguales del triángulo isósceles?
4. Un recipiente cilíndrico de 5 cm de radio y 30 cm de altura contiene tres pelotas de tenis bien encajadas. Calcule el volumen de aire que hay en su interior.
5. La base de una pirámide regular es un hexágono de 15 cm de lado y su altura es de 30 cm. Halle su volumen.

Si partimos esta pirámide por un plano paralelo a la base que corta a la altura en la mitad, halle el volumen de cada una de las dos partes resultantes.
6. Con un alambre de 100 cm se construyen un cuadrado de lado L y un triángulo equilátero de lado w , usando todo el alambre disponible. Calcule **la suma** de las áreas de las dos figuras:
 - (a) en términos de L ,
 - (b) en términos de w .
7. Con un alambre de 100 cm se construyen un cuadrado de lado L y una circunferencia de radio r , usando todo el alambre disponible. Calcule **la suma** de las áreas de las dos figuras:
 - (a) en términos de L ,
 - (b) en términos de r .

Nociones sobre conjuntos, intervalos y valor absoluto

Nociones sobre conjuntos

Un **conjunto** es una colección de objetos, llamados **elementos** del conjunto.

Un conjunto puede describirse:

- **Por extensión:** haciendo una lista explícita de sus elementos, separados por comas y encerrados entre llaves, o
- **Por comprensión:** dando la condición o condiciones que cumplen los elementos del conjunto.

Si A es un conjunto, decimos que a **pertenece a** A y escribimos $a \in A$ si a es un elemento de A . En caso contrario decimos que a **no pertenece a** A y escribimos $a \notin A$.

Ejemplo 4.1

El conjunto A cuyos elementos son los números naturales menores que 5 puede escribirse así: $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Observemos que $1 \in A$ y $5 \notin A$.

Para nosotros tendrán sentido especial los conjuntos numéricos.

Sistemas numéricos

- Los **números naturales** son: $1, 2, 3, 4, \dots$. Representamos por $\mathbb{N}$ al conjunto de todos los números naturales, es decir, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- Los **números enteros** están formados por los números naturales junto con los números enteros negativos y el 0. Denotamos por $\mathbb{Z}$ al conjunto de los números enteros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Algunas veces, se acostumbra escribir $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$.

- El conjunto de los **números racionales** se obtiene al formar cocientes de números enteros. Este conjunto lo denotamos por $\mathbb{Q}$. Luego, $r \in \mathbb{Q}$ si y sólo si $r = \frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

Números como $\frac{3}{5}$, $\frac{-7}{4}$, $0 = \frac{0}{1}$, $2 = \frac{2}{1}$, $0.1 = \frac{1}{10}$ son ejemplos de números racionales.

¡Recuerde que no es posible dividir por cero, por tanto, expresiones como $\frac{3}{0}$ ó $\frac{0}{0}$ no están definidas!

- Existen números que no pueden expresarse en la forma $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Estos números se denominan **irracionales**, denotados por $\mathbb{I}$. Es posible probar que números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, e , π pertenecen a $\mathbb{I}$.
- El conjunto de los **números reales** se representa por $\mathbb{R}$ y consta de la unión de los racionales y los irracionales, es decir, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales y el conjunto de puntos de una recta. De esta manera representamos al conjunto $\mathbb{R}$ mediante una recta geométrica.

Todos los números reales tienen una **representación decimal**. Si el número es racional, entonces, su decimal correspondiente es periódico. Por ejemplo

$$\frac{1}{2} = 0.5000\dots = 0.5\overline{0}, \quad \frac{1}{3} = 0.3333\dots = 0.\overline{3},$$

$$\frac{157}{495} = 0.3171717\dots = 0.3\overline{17}, \quad \frac{9}{7} = 1.285714285714\dots = 1.\overline{285714}.$$

La barra significa que la sucesión de cifras se repite indefinidamente. Si el número es irracional, la representación decimal no es periódica, por ejemplo

$$\sqrt{2} = 1.414213562373\dots, \quad e = 2.7182818284590452\dots$$

En la práctica, se acostumbra aproximar un número irracional por medio de uno racional, por ejemplo

$$\sqrt{2} \approx 1.4142, \quad e \approx 2.71828, \quad \pi \approx 3.1416.$$

Ejercicio: Dada la representación decimal periódica de un número, ¿cómo hallamos la fracción equivalente?

Si un conjunto no tiene elementos se llama **conjunto vacío** y se denota por $\emptyset$ ó $\{ \}$.

Ejemplo 4.2

Sea $A = \{x \in \mathbb{N} / x + 1 = 0\}$. No existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $x + 1 = 0$. Luego, $A = \emptyset$.

La expresión anterior se lee así: A es el conjunto cuyos elementos x **son tales que** x satisface la ecuación $x + 1 = 0$.

Si un conjunto es vacío o su número de elementos es un número natural, se dice que el conjunto es **finito**.

Si un conjunto no es finito, se dice que es **infinito**.

Ejemplo 4.3

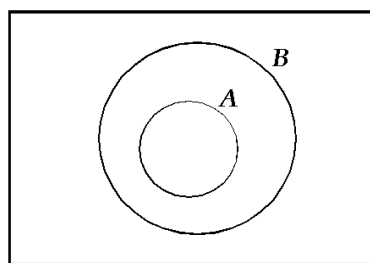
- Sea $A = \{x \in \mathbb{N} / x < 4\}$.

Claramente, A tiene 3 elementos: $A = \{1, 2, 3\}$. Luego, A es finito.

- Sea $A = \mathbb{N}$ (conjunto de números naturales).

A es infinito ya que no podemos asignar un número natural que represente el número de elementos de $\mathbb{N}$.

Si A y B son conjuntos, decimos que A es **subconjunto de** B y escribimos $A \subseteq B$ si todo elemento de A es también elemento de B .



$$A \subseteq B$$

Figura 4.1

Ejemplo 4.4

Sean $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{x / x \text{ es una letra del abecedario}\}$.

$A \subseteq B$, pero B no es subconjunto de A y escribimos $B \not\subseteq A$.

Propiedades

Si A , B y C son conjuntos,

- a) $\emptyset \subseteq A$.
- b) $A \subseteq A$.
- c) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.

Dos conjuntos A y B son **iguales** si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Es decir, $A = B$ si y sólo si todo elemento de A está en B y todo elemento de B está en A .

Ejemplo 4.5

Sean $A = \{x / x \text{ es una vocal de la palabra mundo}\}$ y $B = \{u, o\}$, entonces $A = B$.

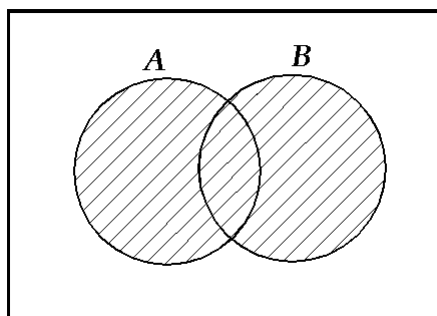
Sean $A = \{1, 3, 7\}$ y $B = \{1, 3, 7, 1\}$, entonces $A = B$.

Operaciones entre conjuntos

1. Unión

Sean A y B dos conjuntos. Definimos la **unión de A y B** , denotada por $A \cup B$, como el conjunto

$$A \cup B = \{x/x \in A \text{ o } x \in B\}.$$



$$A \cup B$$

Figura 4.2

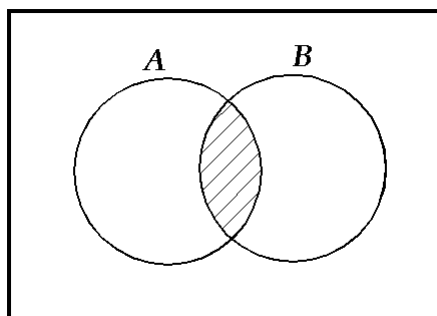
Ejemplo 4.6

Sean $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{0, 3, 6, 9, 12\}$. Entonces $A \cup B = \{0, 1, 3, 5, 6, 7, 9, 12\}$.

2. Intersección

Sean A y B dos conjuntos. Definimos la **intersección de A y B** , denotada por $A \cap B$, como el conjunto

$$A \cap B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\}.$$



$$A \cap B$$

Figura 4.3

Ejemplo 4.7

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 0 \text{ y } x \leq 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 1 \text{ y } x \leq 3\}$. Entonces, $A \cap B = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 1 \text{ y } x \leq 2\}$.

3. Complemento

Si U es un conjunto universal y A es un subconjunto de U , definimos el **complemento de** A , denotado por A' , como el conjunto

$$A' = \{x \in U / x \notin A\}.$$

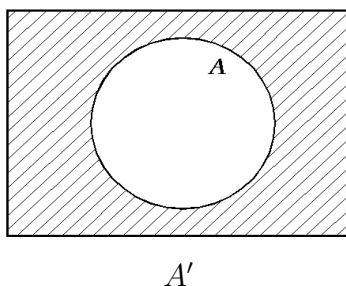


Figura 4.4

Ejemplo 4.8

Si $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y $A = \{c, f, h\}$, entonces $A' = \{a, b, d, e, g\}$.

4. Diferencia

Sean A y B dos conjuntos. Definimos la **diferencia de A y B** , denotada por $A - B$, como

$$A - B = \{x / x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

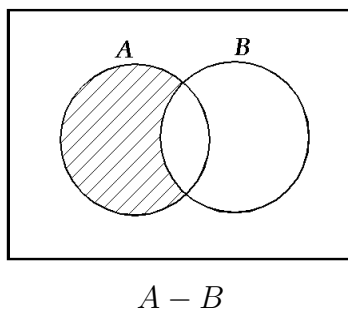


Figura 4.5

Ejemplo 4.9

Sean $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{1, 4, 6, 7, 8, 9\}$. Entonces $A - B = \{0, 2, 3, 5\}$.

Intervalos

Un **intervalo** es un subconjunto de $\mathbb{R}$ de ciertas características. La denominación, descripción, notación y representación geométrica de estos conjuntos es como sigue:

Sean a y $b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.

El **intervalo abierto** entre a y b , denotado por (a, b) , es el conjunto de los números reales mayores que a y menores que b . Así, $c \in (a, b)$ si $a < c$ y $c < b$. Estas dos expresiones se combinan así: $a < c < b$. Claramente $a \notin (a, b)$ y $b \notin (a, b)$.

Se denomina **intervalo cerrado** desde a hasta b , y se denota por $[a, b]$, al conjunto de los números reales mayores ó iguales que a y menores o iguales que b . Es decir, el intervalo cerrado incluye los extremos a y b . Usando la notación de conjuntos, estos intervalos pueden escribirse en términos de desigualdades, así:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}, \quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}.$$

Gráficamente:

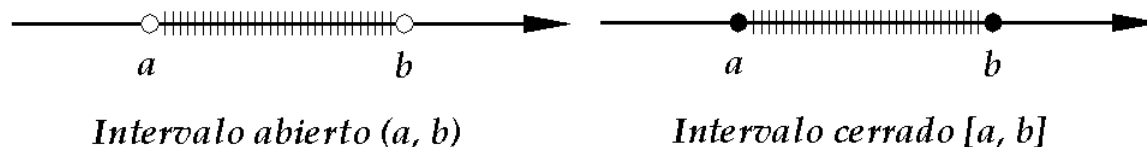


Figura 4.6

Los intervalos pueden incluir un solo punto extremo o se pueden prolongar hasta el infinito en una dirección o en ambas direcciones. En la siguiente tabla, se resumen todos los tipos de intervalos:

NOTACIÓN	EN FORMA DE CONJUNTO	GRÁFICAMENTE
(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	
(a, ∞)	$\{x \in \mathbb{R} / a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \in \mathbb{R} / x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	

Figura 4.7

Ejemplo 4.10

Expresar en términos de desigualdades los siguientes intervalos y representarlos gráficamente:

- a) $[-3, 8]$
- b) $(5, 12]$
- c) $(-\infty, 2)$.

Solución

- a) $[-3, 8] = \{x / -3 \leq x \leq 8\}$. Gráficamente

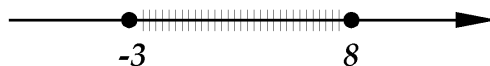


Figura 4.8

- b) $(5, 12] = \{x / 5 < x \leq 12\}$. Gráficamente



Figura 4.9

- c) $(-\infty, 2) = \{x / x < 2\}$. Gráficamente



Figura 4.10

Como los intervalos son conjuntos, podemos realizar entre ellos las operaciones unión, intersección y demás operaciones entre conjuntos.

Ejemplo 4.11

$[5, 9] \cup (3, 6) = (3, 9]$, ya que

$$\{x / 5 \leq x \leq 9\} \cup \{x / 3 < x < 6\} = \{x / 3 < x \leq 9\}.$$

Gráficamente

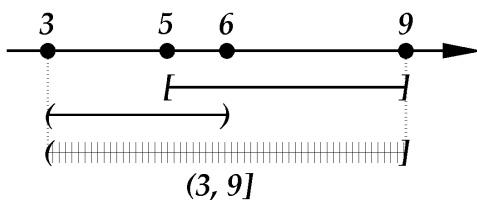


Figura 4.11

$[5, 9] \cap (3, 6) = [5, 6)$ ya que

$$\{x/5 \leq x \leq 9\} \cap \{x/3 < x < 6\} = \{x/5 \leq x < 6\}.$$

Gráficamente

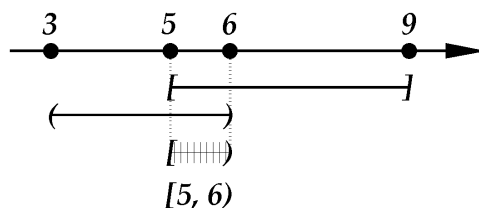


Figura 4.12

Valor absoluto

Si a y b son dos números reales, la **distancia** entre a y b , denotada por $d(a, b)$, es la medida del segmento que los une en la recta real.

- $d(a, b) \geq 0$, $d(a, b) = 0$ cuando $a = b$
- $d(a, b) = d(b, a)$.

El **valor absoluto** de un número a , denotado por $|a|$, es la distancia desde a hasta 0, es decir $|a| = d(a, 0)$. Por lo tanto,

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 4.12

- $|8| = 8$
- $|-7| = -(-7) = 7$
- $|0| = 0$

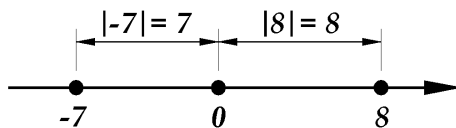


Figura 4.13

Ejemplo 4.13

- $|3 - e| = 3 - e$ (ya que $e < 3 \implies 3 - e > 0$).
- $|2 - \pi| = -(2 - \pi) = \pi - 2$ (ya que $2 < \pi \implies 2 - \pi < 0$).

Propiedades del valor absoluto

Si a y b son números reales,

1. $|a| \geq 0$
2. $|a| = |-a|$
3. $-|a| \leq a \leq |a|$
4. $|ab| = |a| |b|$
5. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, con $b \neq 0$
6. $|a + b| \leq |a| + |b|$. La igualdad se cumple cuando a y b tienen el mismo signo.

Podemos calcular la distancia entre a y b utilizando el valor absoluto:

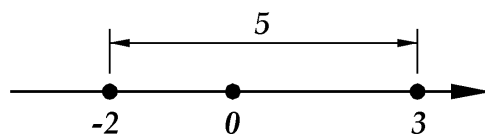


Figura 4.14

En la gráfica observamos que la distancia entre -2 y 3 es 5 y es la misma distancia entre 3 y -2 .

Como $|3 - (-2)| = 5$, y $|-2 - 3| = 5$, tenemos que $d(-2, 3) = |-2 - 3| = |3 - (-2)| = d(3, -2)$.

En general, si a y b son números reales:

- a) $|a - b| = |b - a|$, ya que $|a - b| = |-(b - a)| = |b - a|$, por propiedad 2.
- b) $d(a, b) = |a - b|$.

Ejercicios

1. Se realizó una encuesta a 11 personas, sobre sus preferencias por dos tipos de productos A y B, obteniéndose los siguientes resultados:

El número de personas que prefirieron uno solo de los productos fue 7.

El número de personas que prefirieron ambos productos fue igual al número de personas que no prefirió ninguno de los dos productos.

El número de personas que no prefieren el producto A y prefirieron el producto B fue 3.

- (a) ¿Cuántas personas prefieren el producto A?

- (b) ¿Cuántas personas prefieren el producto B solamente?
- (c) ¿Cuántas personas prefieren ambos productos?

2. Considere el siguiente diagrama de Venn.

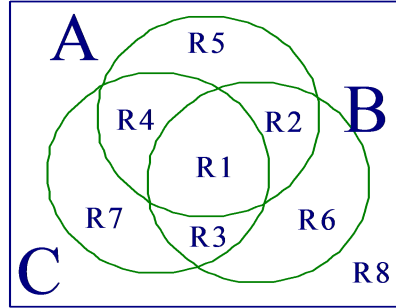


Figura 4.15

- (a) Expresé la región comprendida por $R4$, $R5$, $R7$, en términos de A , B y C .
- (b) Expresé la región comprendida por $R2$, $R3$, $R4$, $R5$, $R6$, en términos de A , B y C .
- (c) Expresé la región comprendida por $R2$, $R5$, $R8$, en términos de A , B y C .
- (d) Expresé la región comprendida por $R1$, $R2$, $R6$, en términos de A , B y C .
3. En una investigación realizada a un grupo de 100 alumnos que estudian idiomas se encontró que: 18 estudian sólo Alemán, 23 estudian Alemán pero no Español, 8 Alemán y Francés, 26 Alemán, 48 Francés, 8 Francés y Español y 24 no estudian ninguno de los tres idiomas.
- (a) Realice un diagrama que ilustre los resultados de la investigación.
- (b) ¿Cuántos alumnos estudian Español?
- (c) ¿Cuántos alumnos estudian Alemán y Español, pero no Francés?
- (d) ¿Cuántos alumnos estudian Francés pero no Español?
4. Sean $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x < 10\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z} : -4 < x \leq 6\}$. Además, considere como conjunto universal $U = \{x \in \mathbb{Z} : -10 \leq x \leq 10\}$. Halle los siguientes conjuntos:

(a) $A \cup B \cup C$

(f) $(A' \cap B') - C'$

(b) $A \cap B \cap C$

(g) $A' \cap B$

(c) $A - B$

(h) $A \Delta B$

(d) $C - A$

(i) $B \Delta C$

(e) $(A \cap B) - C$

5. Considere los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 4\}$ y $C = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leq 5\}$. Halle:

(a) $A \cap B$

(b) $A \cap B$

6. Exprese cada conjunto mediante la notación de intervalo:

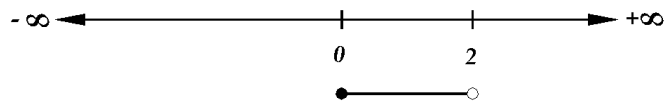


Figura 4.16

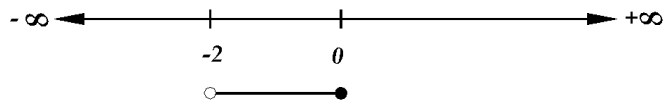


Figura 4.17

7. Determine la distancia entre los números dados:

(a) -2.5 y 1.5

(c) -38 y -57

(b) $\frac{7}{15}$ y $-\frac{1}{21}$

(d) -2.6 y -1.8

8. Ordene de menor a mayor los números racionales $1.4\overline{3}$, $\frac{9}{7}$ y $\frac{8}{5}$.

Potenciación y radicación

Si $a, x \in \mathbb{R}$, una expresión de la forma a^x se llama **expresión exponencial**, el número a se llama **base**, y el número x se conoce como **exponente**.

Aunque x puede ser cualquier número real, trabajaremos solamente exponentes enteros y racionales.

Exponentes enteros

a) Exponentes enteros positivos ó naturales

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. El producto $a \cdot a \cdots a$ de n factores se denota por a^n y se llama la **n-ésima potencia** de a . Es decir:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores.}}$$

Ejemplo 5.1

- $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
- $(-5)^6 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 15625$
- $-5^6 = -(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = -15625$
- $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

b) Exponente 0

Si a es un número real diferente de 0 definimos $a^0 = 1$.

Nota: La expresión 0^0 no está definida.

Ejemplo 5.2

- $\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1$

- $(-5)^0 = 1$

c) Exponentes enteros negativos

Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y n es un entero positivo, es decir, $n > 0$, entonces $-n < 0$, o sea, $-n$ es un entero negativo.

Definimos $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Ejemplo 5.3

- $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
- $(-5)^{-1} = \frac{1}{(-5)^1} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$
- $x^{-1} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{x}$, para $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$.

Propiedades de los exponentes enteros

También conocidas como "leyes de los exponentes".

1. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$ entonces

$$a^m a^n = a^{m+n},$$

ya que

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ factores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores}} = a^{m+n}.$$

$m + n$ factores

Ejemplo 5.4

$$5^3 \cdot 5^6 = 5^{3+6} = 5^9.$$

2. Sean $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, y $m, n \in \mathbb{Z}$ entonces

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

En particular, si $m, n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0,$$

ya que

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}.$$

Ejemplo 5.5

$$\frac{4^7}{4^2} = 4^{7-2} = 4^5.$$

3. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

ya que

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n \text{ factores}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ factores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ factores}} \cdots \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ factores}} = a^{m \cdot n}. \end{aligned}$$

$m \cdot n$ factores

En general, para $a \neq 0$ y $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Ejemplo 5.6

$$(7^6)^3 = 7^{6 \cdot 3} = 7^{18}.$$

$$4. \quad (ab)^n = a^n b^n, n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo 5.7

$$(5 \cdot 8)^4 = 5^4 8^4.$$

$$5. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ con } b \neq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo 5.8

$$\left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{9^2}{4^2}.$$

$$6. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \text{ con } a \text{ y } b \text{ no nulos y } n \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 5.9

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2.$$

$$7. \quad \boxed{\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}, \text{ con } a \text{ y } b \text{ no nulos y } m, n \in \mathbb{Z}.}$$

Ejemplo 5.10

$$\frac{4^{-3}}{7^{-5}} = \frac{7^5}{4^3}.$$

Ejemplo 5.11

Escriba las siguientes expresiones con exponentes enteros positivos:

a) $z^{-3}z^5 = z^{-3+5} = z^2; z \neq 0$

b) $\frac{5^4}{5^8} = 5^{4-8} = 5^{-4} = \frac{1}{5^4}$

c) $(5y)^3 = 5^3y^3 = 125y^3.$

Ejemplo 5.12

Simplifique las siguientes expresiones, dando la respuesta sólo con exponentes positivos:

a) $(4a^4b^3)^2 (5a^2b^5)$

b) $\left(\frac{3xy^2}{2x^{-1}z^2}\right)^2 \left(\frac{x^2z^2}{3y^2}\right).$

Solución

a) Procedemos haciendo uso de las propiedades de los exponentes

$$\begin{aligned} (4a^4b^3)^2 (5a^2b^5) &= \left(4^2 (a^4)^2 (b^3)^2\right) (5a^2b^5) \\ &= (16a^8b^6) (5a^2b^5) \\ &= (16)(5)a^8a^2b^6b^5 \\ &= 80a^{10}b^{11}. \end{aligned}$$

b) Procedemos haciendo uso de las propiedades de los exponentes

$$\begin{aligned} \left(\frac{3xy^2}{2x^{-1}z^2}\right)^2 \left(\frac{x^2z^2}{3y^2}\right) &= \frac{3^2x^2y^4x^2z^2}{4 \cdot 3x^{-2}y^2z^4} \\ &= \frac{3^23^{-1}}{4}x^4x^2y^4y^{-2}z^2z^{-4} \\ &= \frac{3}{4}x^6y^2z^{-2} \\ &= \frac{3x^6y^2}{4z^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.13

Simplifique la expresión

$$\left(\frac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}} \right)^{-3},$$

y escriba el resultado con exponentes positivos.

Solución

$$\left(\frac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}} \right)^{-3} = \left(\frac{x^2y^3z^{-4}}{xy^{-2}z^{-3}} \right)^3 = (xy^5z^{-1})^3 = x^3y^{15}z^{-3} = \frac{x^3y^{15}}{z^3}.$$

Exponentes racionales

Vamos a considerar ahora las expresiones de la forma $a^{\frac{p}{q}}$, con $a \in \mathbb{R}$ y $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, es decir, expresiones exponenciales en las cuales el exponente es un número racional.

I. Expresiones exponenciales de la forma $a^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}$.

- Sea $a \geq 0$, la **raíz cuadrada** de a , que denotamos por $\sqrt[2]{a}$ o por $\sqrt{a}$, es el único $b \geq 0$ tal que $b^2 = a$. Es decir:

$$\sqrt[2]{a} = b \text{ significa que } b^2 = a \text{ y } b \geq 0.$$

- Sean $a \geq 0$ y n un número natural par. La raíz n -ésima de a , que denotamos por $\sqrt[n]{a}$, es el único $b \geq 0$ tal que $b^n = a$. Es decir:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ significa que } b^n = a \text{ y } b \geq 0.$$

- Sean $a \in \mathbb{R}$ arbitrario y n un número natural impar. La raíz n -ésima de a , que denotamos por $\sqrt[n]{a}$, es el único b tal que $b^n = a$.
- Para $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$ definimos $a^{\frac{1}{n}}$ como $\sqrt[n]{a}$, siempre que esta última expresión tenga sentido.

Ejemplo 5.14

- a) $\sqrt[4]{625} = 5$ ya que $5^4 = 625$
- b) $\sqrt[3]{-27} = -3$ ya que $(-3)^3 = -27$
- c) $\sqrt[4]{-81}$ no está definida puesto que 4 es par, y $-81 < 0$.

Importante: Si $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Ejemplo 5.15

$\sqrt{3^2} = 3$, pero $\sqrt{(-3)^2} \neq -3$, porque $-3 < 0$, de hecho $\sqrt{(-3)^2} = 3 = |-3|$.

Propiedades

Sean a , b y c números reales y $n \in \mathbb{N}$.

1. $\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}},$ con $a \geq 0$ y $b \geq 0$ si n es par.

Ejemplo 5.16

$$\sqrt[3]{-27 \cdot 64} = \sqrt[3]{-27} \sqrt[3]{64} = (-3)(4) = -12.$$

2. $\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0,}$ con $a \geq 0$ y $b \geq 0$ si n es par.

Ejemplo 5.17

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}.$$

3. $\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}},$ con m y n impares cuando $a < 0$.

Ejemplo 5.18

$$\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[6]{729} = 3.$$

4. $\boxed{\sqrt[n]{c^n} = |c|}$ si n es par.

Ejemplo 5.19

$$\sqrt[4]{3^4} = 3 \text{ y } \sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = 5.$$

5. $\boxed{\sqrt[n]{c^n} = c}$ si n es impar.

Ejemplo 5.20

$$\sqrt[7]{(-2)^7} = -2.$$

Ejemplo 5.21

Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{a^2 b^6}$

b) $\sqrt[3]{x^3 y^9}$

c) $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}.$

Solución

a) $\sqrt{a^2 b^6} = \sqrt{a^2} \sqrt{b^6} = |a| \sqrt{(b^3)^2} = |a| |b^3|$

$$\text{b) } \sqrt[3]{x^3 y^9} = \sqrt[3]{x^3} \sqrt[3]{(y^3)^3} = xy^3$$

$$\text{c) } \sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} - \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{16} \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3}.$$

II. Expresiones exponenciales de la forma $a^{\frac{m}{n}}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n > 0$

Sean $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Definimos $a^{\frac{m}{n}}$ por

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}},$$

siempre que la expresión del lado derecho esté definida.

Es importante observar que las leyes de los exponentes también son válidas para exponentes racionales, siempre y cuando las expresiones involucradas estén definidas.

Ejemplo 5.22

Evalúe las siguientes expresiones:

$$\text{a) } \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{b) } \left(\frac{-27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Solución

$$\text{a) } \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{9^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{b) } \left(\frac{-27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{(-27)^{\frac{2}{3}}}{(8)^{\frac{2}{3}}} = \frac{(\sqrt[3]{-27})^2}{(\sqrt[3]{8})^2} = \frac{(-3)^2}{2^2} = \frac{9}{4}.$$

Ejemplo 5.23

Simplifique las siguientes expresiones, dando la respuesta sólo con exponentes positivos:

$$\text{a) } \left(2x^4 y^{-\frac{4}{5}}\right)^3 (8y^2)^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{b) } \frac{(y^{10} z^{-5})^{\frac{1}{5}}}{(y^{-2} z^3)^{\frac{1}{3}}}.$$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } \left(2x^4 y^{-\frac{4}{5}}\right)^3 (8y^2)^{\frac{2}{3}} &= \left(8x^{12} y^{-\frac{12}{5}}\right) (\sqrt[3]{8})^2 y^{\frac{4}{3}} \\ &= 32x^{12} y^{\frac{4}{3} - \frac{12}{5}} = 32x^{12} y^{-\frac{16}{15}} = \frac{32x^{12}}{y^{\frac{16}{15}}} \end{aligned}$$

$$b) \frac{(y^{10}z^{-5})^{\frac{1}{5}}}{(y^{-2}z^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{y^{\frac{10}{5}}z^{-\frac{5}{5}}}{y^{-\frac{2}{3}}z^{\frac{3}{3}}} = \frac{y^2z^{-1}}{y^{-\frac{2}{3}}z} = \frac{y^2y^{\frac{2}{3}}}{zz} = \frac{y^{\frac{8}{3}}}{z^2}.$$

Ejercicios

1. Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

$$(a) \sqrt{32} - \sqrt{48}$$

$$(b) \sqrt[3]{162} + \sqrt[3]{2}.$$

2. Simplifique las siguientes expresiones y elimine todos los exponentes negativos:

$$(a) \left(\frac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}} \right)^{-3}$$

$$(b) \left(\frac{c^4d^3}{cd^2} \right) \left(\frac{d^2}{c^3} \right)^3.$$

3. Simplifique las expresiones y elimine todos los exponentes negativos. Suponga que las letras representan números positivos:

$$(a) \left(\frac{a^2b^{-3}}{x^{-1}y^2} \right)^3 \left(\frac{x^{-2}b^{-1}}{a^{3/2}y^{1/3}} \right)$$

$$(b) \frac{(y^{10}z^{-5})^{1/5}}{(y^{-2}z^3)^{1/3}}$$

$$(c) \frac{12^{-3/4} \times 15^{4/3}}{10^2 \times 45^{5/6}}.$$

4. Verifique que:

$$\left(\sqrt[5]{\frac{b^2c^{-1/2}}{b^{-1/2}c^2}} \sqrt[3]{\frac{b^{-1/2}c}{c^{-1/2}b}} \right)^{-4} = 1.$$

Expresiones algebraicas

- Una **expresión algebraica** es una combinación de **constantes** (números) y **variables** (elementos genéricos de un conjunto numérico, representados por letras), mediante suma, resta, multiplicación, división y potenciación con exponentes enteros o racionales.

Generalmente las variables se representan con las últimas letras del alfabeto: $u, v, w, x, \dots$

$$3x^2 + 4x - 5, \quad \frac{x + z}{y^2 + x}, \quad \frac{\sqrt{y} - 4z}{z + y},$$

son expresiones algebraicas.

- Un **polinomio** en la variable x es una expresión algebraica de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

donde $a_0, a_1, \dots, a_n$ son números reales, llamados **coeficientes del polinomio** y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, se dice que el polinomio es de **grado** n , es decir, el grado de un polinomio corresponde al mayor exponente de la variable que aparece en el polinomio.

Ejemplo 6.1

$7x^5 - 3x^4 + 2x^2 + x + 1$ es un polinomio en la variable x de grado 5. El término en x^3 no se escribe porque su coeficiente es 0.

Suma de polinomios

Para sumar (o restar) polinomios, utilizamos las propiedades de la suma (o resta) de números reales.

Ejemplo 6.2

- Hacer la suma de $3x^2 + x + 1$ con $2x^2 - 3x - 5$.
- De $(3x^2 + x + 1)$ reste $(2x^2 - 3x - 5)$.

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } (3x^2 + x + 1) + (2x^2 - 3x - 5) &= (3x^2 + 2x^2) + (x - 3x) + (1 - 5) \\ &= (3 + 2)x^2 + (1 - 3)x + (1 - 5) = 5x^2 - 2x - 4. \end{aligned}$$

$$\text{b) } (3x^2 + x + 1) - (2x^2 - 3x - 5) = 3x^2 + x + 1 - 2x^2 + 3x + 5 = x^2 + 4x + 6.$$

Producto o multiplicación de polinomios

Para multiplicar polinomios usamos las propiedades de la suma y el producto de números reales, y las leyes de los exponentes.

Ejemplo 6.3

$$\begin{aligned} (3x - 4)(x^2 + x) &= 3x(x^2 + x) + (-4)(x^2 + x) \\ &= 3x^3 + 3x^2 - 4x^2 - 4x \\ &= 3x^3 - x^2 - 4x. \end{aligned}$$

División de Polinomios

Si $P(x)$ y $D(x)$ son polinomios tales que el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el grado de $D(x)$ y si $D(x) \neq 0$, entonces existen polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)},$$

con el grado de $R(x)$ menor que el grado de $D(x)$.

Los polinomios $P(x)$ y $D(x)$ se llaman **dividendo** y **divisor** respectivamente, $Q(x)$ es el **cociente** y $R(x)$ es el **residuo**.

Si en la ecuación anterior, multiplicamos en ambos lados por $D(x)$ obtenemos la ecuación equivalente

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x).$$

Veamos, en el siguiente ejemplo, cómo hallar $Q(x)$ y $R(x)$ dados $P(x)$ y $D(x)$.

Ejemplo 6.4

Divida $5x^3 - 2x + 1$ entre $x + 1$.

Solución

En este caso, $P(x) = 5x^3 - 2x + 1$ es el dividendo y $D(x) = x + 1$ es el divisor. Para hallar el cociente $Q(x)$ y el residuo $R(x)$ se procede así:

- Se ordenan ambos polinomios con respecto a las potencias de x y si falta alguna potencia se agrega con coeficiente 0. En este caso, sólo falta agregar $0x^2$ al dividendo y la división se indica así:

$$5x^3 + 0x^2 - 2x + 1 \quad \Big| \quad x + 1$$

- Para obtener el primer término del cociente, se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor. En este caso, $\frac{5x^3}{x} = 5x^2$ (Éste será el primer término del cociente).

$$5x^3 + 0x^2 - 2x + 1 \quad \Big| \quad \begin{array}{l} x + 1 \\ 5x^2 \end{array}$$

- Se multiplica el divisor por el primer término del cociente: $(x + 1)5x^2 = 5x^3 + 5x^2$ y este resultado se resta del dividendo:

$$\begin{array}{r} 5x^3 + 0x^2 - 2x + 1 \quad \Big| \quad x + 1 \\ -5x^3 - 5x^2 \quad \quad \quad 5x^2 \\ \hline -5x^2 - 2x + 1 \end{array}$$

- Se repite el procedimiento anterior, considerando el polinomio del último renglón, $-5x^2 - 2x + 1$, como dividendo:

$$\begin{array}{r} 5x^3 + 0x^2 - 2x + 1 \quad \Big| \quad x + 1 \\ -5x^3 - 5x^2 \quad \quad \quad 5x^2 - 5x + 3 \\ \hline -5x^2 - 2x + 1 \\ 5x^2 + 5x \\ \hline 3x + 1 \\ -3x - 3 \\ \hline -2 \end{array}$$

- El proceso termina cuando el polinomio que se obtiene en el último renglón es de menor grado que el divisor. En este caso, como el divisor es un polinomio de grado 1 y el polinomio del último renglón es de grado 0, el proceso de división terminó y escribimos el resultado así:

$$\frac{5x^3 - 2x + 1}{x + 1} = 5x^2 - 5x + 3 + \frac{-2}{x + 1},$$

donde $Q(x) = 5x^2 - 5x + 3$ es el cociente y $R(x) = -2$ es el residuo de la división.

Este resultado también se puede escribir, después de multiplicar ambos lados de la ecuación anterior por $x + 1$, como

$$5x^3 - 2x + 1 = (x + 1)(5x^2 - 5x + 3) - 2.$$

División sintética

La división sintética es un método rápido para dividir polinomios cuando el divisor es de la forma $x - c$, con c un número real.

Ejemplo 6.5

Divida $x^4 - 3x^2 + 2x - 5$ entre $x + 2$, usando división sintética.

Solución

- Sólo se escriben los coeficientes del dividendo y el valor de c (en este caso $c = -2$). Si falta alguna potencia de x se escribe 0 como coeficiente.

$$1 \quad 0 \quad -3 \quad 2 \quad -5 \quad \big| \quad -2$$

- Se traza una línea horizontal debajo de los coeficientes del polinomio, dejando un espacio, se escribe el primer coeficiente 1, debajo de la línea, se multiplica por c ($1 \times -2 = -2$) y el resultado se escribe en el espacio intermedio, debajo del segundo coeficiente y se suman estos dos números ($0 + (-2) = -2$). El resultado se multiplica por c y se suma al tercer coeficiente. Se repite este proceso hasta terminar los coeficientes del dividendo.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 0 & -3 & 2 & -5 & \\ & -2 & 4 & -2 & 0 & \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 & -5 & \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Coeficientes}} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{\text{Residuo}}$
del cociente

- El residuo es el último número del último renglón ($R(x) = -5$) y el cociente es el polinomio de un grado menor que el dividendo y cuyos coeficientes son los números del último renglón, excepto el último (En este caso, $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x + 0$).

Escribimos:

$$\frac{x^4 - 3x^2 + 2x - 5}{x + 2} = x^3 - 2x^2 + x + \frac{-5}{x + 2}$$

o equivalentemente

$$x^4 - 3x^2 + 2x - 5 = (x + 2)(x^3 - 2x^2 + x) - 5.$$

Ejercicios

- Considere los polinomios

$$P(x) = 4x^2 - 1, \quad Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2,$$

$$R(x) = 6x^2 + x + 1, \quad S(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4 \text{ y } T(x) = \frac{3}{2}x^2 + 5.$$

Calcular los siguientes polinomios

$$P(x) - R(x), T(x)S(x) \text{ y } S(x)S(x) - 3Q(x).$$

2. En cada literal determine el cociente y el residuo si se divide $f(x)$ entre $p(x)$.

(a) $f(x) = x^5 - x^4 + x^2 - x,$

$$p(x) = x^3 - x^2 + x.$$

(b) $f(x) = x^{n+2} + 3x^{n+3} + x^{n+4} - x^{n+5},$

$$p(x) = x^2 + x.$$

3. Divida $5x^3 - 2x + 1$ entre $x + 1$, utilizando división sintética.

4. Para cada una de las divisiones señaladas, calcule el cociente y el residuo correspondientes. Utilice en cada literal la regla de Ruffini (división sintética).

(a) $\frac{3x^3 + 7x^2 + 6x - 1}{x + 9}.$

(b) $\frac{x^4 + x + 1}{x - 1}.$

Factorización

Productos notables

Algunos productos se usan frecuentemente y por ello es fácil memorizar el resultado. Sean a y b números reales o expresiones algebraicas. Tenemos que

1. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
4. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
7. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

Estos resultados pueden verificarse realizando los productos, así:

3. $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a \cdot a + a(-b) + (-b)a + (-b)(-b)$
 $= a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
4. $(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$
 $= aa^2 + a(-2ab) + ab^2 + (-b)a^2 + (-b)(-2ab) + (-b)b^2$
 $= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Interpretación geométrica

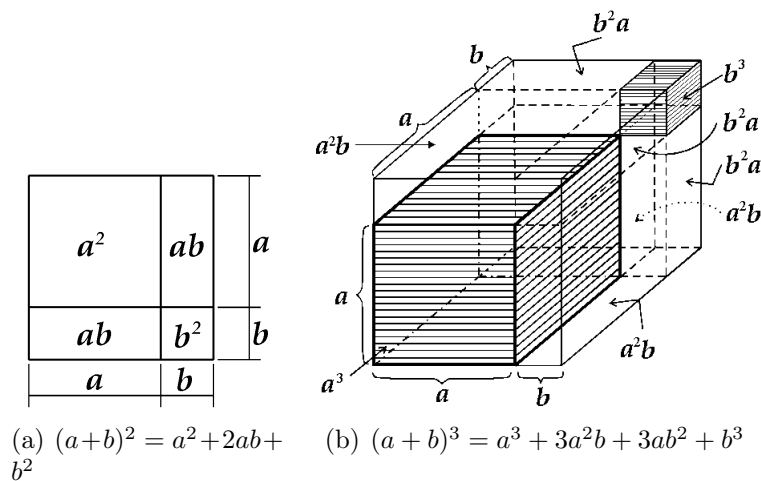


Figura 7.1

Ejemplo 7.1

Utilice los productos notables para obtener los siguientes productos:

a) $\left(c + \frac{1}{c}\right)^2, c \neq 0$

b) $\left(\sqrt{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\sqrt{a} + \frac{1}{b}\right), b \neq 0$

c) $(1 - 2y)^3$.

Solución

a) Aplicando 2, tenemos:

$$\left(c + \frac{1}{c}\right)^2 = c^2 + 2c\left(\frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{c}\right)^2 = c^2 + 2\frac{c}{c} + \frac{1}{c^2} = c^2 + 2 + \frac{1}{c^2}$$

b) Aplicando 1, tenemos:

$$\left(\sqrt{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\sqrt{a} + \frac{1}{b}\right) = (\sqrt{a})^2 - \left(\frac{1}{b}\right)^2 = a - \frac{1}{b^2}$$

c) Aplicando 5, con $a = 1$ y $b = 2y$, obtenemos:

$$(1 - 2y)^3 = 1^3 - 3(1)^2(2y) + 3(1)(2y)^2 - (2y)^3 = 1 - 6y + 12y^2 - 8y^3.$$

Factorización

Factorizar una expresión algebraica es expresarla como un producto de expresiones más simples. En los ejemplos anteriores, desarrollamos productos de expresiones algebraicas utilizando reiteradamente la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma. Si “reversamos” este proceso hasta tener las expresiones algebraicas en términos de productos, decimos que hemos factorizado dichas expresiones.

Ejemplo 7.2

Factorice la expresión $a^2 + 2ab + b^2$ es escribirla como un producto de factores, es decir,

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b) = (a + b)^2.$$

Utilizando los productos notables podemos factorizar algunas expresiones algebraicas

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad \text{Diferencia de Cuadrados}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{Suma de cubos}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{Diferencia de cubos}$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 \quad \text{Trinomio Cuadrado Perfecto}$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3.$$

Ejemplo 7.3

$$1. \quad 16x^2 - 9z^4 = (4x)^2 - (3z^2)^2 = (4x + 3z^2)(4x - 3z^2).$$

$$2. \quad 27x^3 + y^3 = (3x + y) [(3x)^2 - 3xy + y^2] \\ = (3x + y) (9x^2 - 3xy + y^2).$$

$$3. \quad 64 - 125t^6 = (4 - 5t^2) [(4)^2 + 4(5t^2) + (5t^2)^2] \\ = (4 - 5t^2) (16 + 20t^2 + 25t^4).$$

Consideremos ahora algunos casos especiales de expresiones algebraicas que no pueden factorizarse usando los productos notables:

1. Todos los términos de la expresión algebraica tienen un factor común.

Ejemplo 7.4

Factorice las expresiones:

a) $-2x^3 + 16x$

b) $-7x^4y^2 + 14xy^3 + 21xy^4$

c) $(z + 2)^2 - 5(z + 2)$.

Solución

a) Como $16 = 2 \cdot 8$, tanto 2 como x “están” en los dos términos. Entonces, usando propiedades del producto, tenemos:

$$\begin{aligned} -2x^3 + 16x &= 2x(-x^2 + 8) \\ &= -2x(x^2 - 8) \\ &= -2x(x + \sqrt{8})(x - \sqrt{8}) \\ &= -2x(x + 2\sqrt{2})(x - 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

b) -7 , x y y^2 son factores comunes de todos los términos, entonces

$$-7x^4y^2 + 14xy^3 + 21xy^4 = -7xy^2(x^3 - 2y - 3y^2).$$

c) $z + 2$ es factor de los dos sumandos, entonces:

$$\begin{aligned} (z + 2)^2 - 5(z + 2) &= (z + 2)[(z + 2) - 5] \\ &= (z + 2)(z - 3). \end{aligned}$$

2. La expresión a factorizar es un trinomio (suma o resta de tres términos)

- De la forma $x^2 + bx + c$:

Como $(x + r)(x + s) = x^2 + (r + s)x + rs$, para factorizar el trinomio $x^2 + bx + c$ debemos hallar r y s tales que $b = r + s$ y $c = rs$.

Ejemplo 7.5

Factorice $x^2 - 6x + 5$.

Solución

$x^2 - 6x + 5 = (x + r)(x + s)$, con r y s tales que $r + s = -6$ y $rs = 5$.

Como $5 = (-5)(-1)$ y $-6 = (-5) + (-1)$, entonces $r = -5$ y $s = -1$, y así:

$$x^2 - 6x + 5 = (x - 5)(x - 1).$$

Ejemplo 7.6

Factorice $(3x + 2)^2 + 8(3x + 2) + 12$.

Solución

La expresión dada tiene la forma $(\cdot)^2 + 8(\cdot) + 12$, donde $\cdot$ representa a $(3x - 2)$, entonces, $(\cdot)^2 + 8(\cdot) + 12 = ((\cdot) + 6)((\cdot) + 2)$, y así:

$$\begin{aligned} (3x + 2)^2 + 8(3x + 2) + 12 \\ &= (3x + 2 + 6)(3x + 2 + 2) \\ &= (3x + 8)(3x + 4). \end{aligned}$$

- De la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$:

Observemos que

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \frac{1}{a}(a^2x^2 + b(ax) + ac) \\ &= \frac{1}{a}((ax)^2 + b(ax) + ac). \end{aligned}$$

Si definimos $\tilde{x} = ax$, la expresión entre paréntesis es de la forma $\tilde{x}^2 + B\tilde{x} + C$. Así, podemos factorizar esta expresión usando el caso anterior.

Ejemplo 7.7

Factorice $6y^2 + 11y - 21$.

Solución Podemos escribir

$$6y^2 + 11y - 21 = \frac{1}{6}((6y)^2 + 11(6y) - 126).$$

A efecto de factorizar la expresión entre paréntesis debemos hallar dos números cuya suma sea 11 y cuyo producto sea -126 . Para esto, notemos que la descomposición de 126 en factores primos es $126 = 2 \times 3^2 \times 7$. Por tanteo se obtiene que los números requeridos son 18 y -7 . Así,

$$\begin{aligned} 6y^2 + 11x - 21 &= \frac{1}{6}((6y)^2 + 11(6y) - 126) \\ &= \frac{1}{6}(6y + 18)(6y - 7) \\ &= (y + 3)(6y - 7). \end{aligned}$$

Factorización y simplificación de expresiones algebraicas

Factorización II

3. Combinación de los casos anteriores:

- Expresiones con exponentes racionales:

Ejemplo 8.1

Factorice la expresión $x^{-3/2} + 2x^{-1/2} + x^{1/2}$.

Solución:

Sacamos factor común x^q con q el menor exponente, en este caso $x^{-3/2}$ es factor de los tres términos, entonces

$$\begin{aligned} x^{-3/2} + 2x^{-1/2} + x^{1/2} &= x^{-3/2} (1 + 2x + x^2) \\ &= x^{-3/2} (x + 1)^2. \end{aligned}$$

- Los polinomios con al menos 4 términos se pueden factorizar por agrupación, buscando que cada agrupación se pueda factorizar usando los casos ya descritos.

Ejemplo 8.2

Factorice la expresión $3x^3 - x^2 + 6x - 2$.

Solución:

$$\begin{aligned} 3x^3 - x^2 + 6x - 2 &= (3x^3 - x^2) + (6x - 2) \\ &= x^2(3x - 1) + 2(3x - 1) \\ &= (3x - 1)(x^2 + 2). \end{aligned}$$

Expresiones fraccionarias

Se llama **expresión fraccionaria** o **fracción** al cociente de dos expresiones algebraicas. Por ejemplo,

$$\frac{4z^2}{z-1}, \quad \frac{\sqrt{y}-2}{y^3+5}, \quad \text{y} \quad \frac{3x+1}{2x^{3/4}}$$

son expresiones fraccionarias.

Si en una expresión fraccionaria el numerador y el denominador son polinomios, la expresión se llama **expresión racional**. Por ejemplo,

$$\frac{5x^2}{x+2} \quad \text{y} \quad \frac{7x^3+2x^2-x+1}{4x^4+2x^2+1}$$

son expresiones racionales.

Operaciones con fracciones

1. Simplificación

Factorizamos el numerador y el denominador, y luego aplicamos la propiedad $\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$, cuando sea posible.

Ejemplo 8.3

Simplifique

a) $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$

b) $\frac{1 - x^2}{x^3 - 1}$.

Solución:

a) $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-2}{x-1}$

b) $\frac{1 - x^2}{x^3 - 1} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-(x-1)(1+x)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-(1+x)}{x^2+x+1}$.

2. Las operaciones de **suma**, **resta**, **multiplicación** y **división** entre fracciones se definen y cumplen las mismas propiedades que las respectivas operaciones con números racionales.

Nota: Para obtener el mínimo común denominador (MCD), factorizamos los denominadores y el MCD es el producto de los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

Ejemplo 8.4

Realice las operaciones indicadas y simplifique:

a) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 + x}$

b) $\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x^2 + 7x + 12}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 + x} &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)} \\ &= \frac{x+1+x}{x^2(x+1)} \\ &= \frac{2x+1}{x^2(x+1)}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x^2 + 7x + 12} = \frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{2(x+4) - 1}{(x+3)(x+4)} = \frac{2x+7}{(x+3)(x+4)}.$$

Ejemplo 8.5

Realice las operaciones indicadas y simplifique:

a) $\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 9} \cdot \frac{3+x}{4-x}$

b) $\frac{4y^2 - 9}{2y^2 + 9y - 18} \div \frac{2y^2 + y - 3}{y^2 + 5y - 6}$

c) $\frac{\frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 1}}{\frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 + x - 2}}.$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 9} \cdot \frac{3+x}{4-x} &= \frac{(x-4)(x+3)}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{x+3}{-(x-4)} = \frac{(x-4)(x+3)(x+3)}{-(x-3)(x+3)(x-4)} \\ &= -\frac{x+3}{x-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{4y^2 - 9}{2y^2 + 9y - 18} \div \frac{2y^2 + y - 3}{y^2 + 5y - 6} &= \frac{4y^2 - 9}{2y^2 + 9y - 18} \cdot \frac{y^2 + 5y - 6}{2y^2 + y - 3} \\ &= \frac{(2y-3)(2y+3)}{(2y-3)(y+6)} \cdot \frac{(y+6)(y-1)}{(2y+3)(y-1)} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{\frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 1}}{\frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 + x - 2}} &= \frac{(2x^2 - 3x - 2)(x^2 + x - 2)}{(x^2 - 1)(2x^2 + 5x + 2)} = \frac{(2x+1)(x-2)(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)(2x+1)(x+2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{x-2}{x+1}.$$

Ejercicios

1. Factorice las siguientes expresiones:

(a) $10abc^8 - 15ab^2c$

(b) $x^2 - 11x + 30$

(c) $x^2 + 6x + 8$

(d) $2x^3 - 5x^2 + 6x - 15$

(e) $2x^2 + 4x - 96$

(f) $15y^2 + 2y - 8$

(g) $2z^3 - 128$

(h) $x^4 - 2x^2 - 8$

(i) $x^3(x-6)^2 + x^4(x-6)$

(j) $(x+4)^3(x+6)^4 + (x+4)^4(x+6)^3$

(k) $2x^3 + 8x^2 - 3x - 12$

(l) $9a^2 - 16b^2 - 3a - 4b$

(m) $16x^2 - y^2 - 4x + y$

(n) $x^6 - 9x^3 + 8$

(o) $y^8 - 5y^4 + 4$

(p) $64x^6 - y^6$

(q) $64X^{6n} - Y^{6n}$

2. Simplifique las siguientes expresiones:

(a) $\frac{x}{x^2 - x - 6} - \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-3}$

(b) $\frac{x}{x^2 + x - 2} - \frac{2}{x^2 - 5x + 4}$

(c) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}$

(d) $\frac{\left(a + \frac{1}{b}\right)^m \left(a - \frac{1}{b}\right)^n}{\left(b + \frac{1}{a}\right)^m \left(b - \frac{1}{a}\right)^n}$

(e) $\frac{\frac{1-(x+h)}{2+(x+h)} - \frac{1-x}{2+x}}{h}$

(f) $\sqrt{1 + \left(x^3 - \frac{1}{4x^3}\right)^2}$

Expresiones fraccionarias (continuación)

Fracciones compuestas

Si en una fracción, el numerador o el denominador son también fracciones, la expresión se llama **fracción compuesta**. En el siguiente ejemplo veremos como simplificar algunas fracciones compuestas.

Ejemplo 9.1

Simplifique las siguientes fracciones compuestas:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{\frac{a-b}{a} - \frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b} + \frac{a+b}{a}} \\ \text{b)} \quad & \frac{x^{-1} + y^{-1}}{(x+y)^{-1}} \\ \text{c)} \quad & \frac{(1-x^2)^{1/2} + x^2(1-x^2)^{-1/2}}{1-x^2}. \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{\frac{a-b}{a} - \frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b} + \frac{a+b}{a}} = \frac{\frac{b(a-b) - a(a+b)}{ab}}{\frac{a(a-b) + b(a+b)}{ab}} = \frac{ab - b^2 - a^2 - ab}{a^2 - ab + ab + b^2} = \frac{-(b^2 + a^2)}{a^2 + b^2} = -1. \\ \text{b)} \quad & \frac{x^{-1} + y^{-1}}{(x+y)^{-1}} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x+y}} = \frac{\frac{y+x}{xy}}{\frac{1}{x+y}} = \frac{x+y}{xy} \cdot \frac{x+y}{1} = \frac{(x+y)^2}{xy}. \\ \text{c)} \quad & \frac{(1-x^2)^{1/2} + x^2(1-x^2)^{-1/2}}{1-x^2} = \frac{(1-x^2)^{-1/2}[(1-x^2) + x^2]}{1-x^2} = \frac{(1-x^2)^{-1/2}}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Racionalización

Dada una expresión fraccionaria con radicales en el denominador, **racionalizar el denominador** en tal expresión consiste en multiplicarla y dividirla por un factor adecuado, de manera que se **eliminen los radicales en el denominador**.

- Si el denominador es de la forma $\sqrt{a}$, para racionalizar el denominador multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{a}$. Así

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{a}}{a}.$$

- Si el denominador es de la forma $\sqrt[n]{a^m}$, $m < n$ y $a > 0$, para racionalizar el denominador multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$. Así

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}.$$

- Si el denominador es de la forma $a + b\sqrt{c}$, para racionalizar el denominador multiplicamos numerador y denominador por $a - b\sqrt{c}$, llamado el **conjugado de $a + b\sqrt{c}$** . De esta forma

$$\frac{1}{a + b\sqrt{c}} = \frac{1}{a + b\sqrt{c}} \cdot \frac{a - b\sqrt{c}}{a - b\sqrt{c}} = \frac{a - b\sqrt{c}}{(a + b\sqrt{c})(a - b\sqrt{c})} = \frac{a - b\sqrt{c}}{a^2 - b^2c}.$$

¿Cómo se procede en el caso en que el denominador sea de la forma $a - b\sqrt{c}$?

- Si el denominador es de la forma $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$, para racionalizar el denominador multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$. Resulta que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{(\sqrt[3]{a})^3 - (\sqrt[3]{b})^3} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a - b}.$$

¿Cómo se procede en el caso en que el denominador sea de la forma $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$? (recuerde el producto notable de la suma de cubos!)

De manera similar, **racionalizar el numerador** en fracciones cuyo numerador contiene radicales es eliminar los radicales del numerador. Para ello se procede como en la racionalización del denominador.

Ejemplo 9.2

a) Racionalice el denominador:

$$(i) \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$(ii) \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$$

$$(iii) \frac{2}{3 - \sqrt{5}}$$

$$(iv) \frac{2(x - y)}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$$

b) Racionalice el numerador:

$$(i) \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$$

$$(ii) \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}}{x+2}.$$

Solución:

$$a) (i) \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{(\sqrt{10})^2} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$(ii) \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{x}.$$

$$(iii) \frac{2}{3 - \sqrt{5}} = \frac{2}{3 - \sqrt{5}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{2(3 + \sqrt{5})}{9 - (\sqrt{5})^2} = \frac{2(3 + \sqrt{5})}{9 - 5} = \frac{2(3 + \sqrt{5})}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$(iii) \frac{2(x - y)}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{2(x - y)}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{2(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2} = \frac{2(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} \\ = 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

$$b) (i) \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+h}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+h}} = \frac{x - (x+h)}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} \\ = \frac{-h}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} = \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})}.$$

$$(ii) \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}}{x+2} = \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}}{x+2} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{2^2}} = \frac{(\sqrt[3]{x})^3 + (\sqrt[3]{2})^3}{(x+2)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{2^2})} \\ = \frac{x+2}{(x+2)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{2^2})} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{2^2}}.$$

Nota:

Es muy importante tener en cuenta que:

- $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$
- $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

- $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$
- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{1}{a + b}$
- $\frac{a + b}{a} \neq b$
- $(a + b)^{-1} \neq a^{-1} + b^{-1}$.

Ejercicios

1. Racionalice el denominador en las siguientes expresiones:

(a) $\frac{1}{\sqrt{x} + 1}$.

(b) $\frac{2}{\sqrt[4]{2x^2y^3}}$.

(c) $\frac{3x}{\sqrt{3x} + \sqrt{2x}}$.

2. Racionalice el numerador en la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt{3(x+h)-1} - \sqrt{3x-1}}{h}.$$

3. Simplifique las siguientes expresiones:

(a) $\frac{x}{x^2 + x - 2} - \frac{2}{x^2 - 5x + 4}$.

(b) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}$.

(c) $\frac{\frac{1 - (x+h)}{2 + (x+h)} - \frac{1-x}{2+x}}{h}$.

Funciones

Función

Sean A y B conjuntos. Una **función** f de A en B es una regla que asigna a cada elemento $x \in A$ exactamente un elemento $y \in B$. El elemento $y \in B$, se denota por $f(x)$, y decimos que $f(x)$ es la **imagen** de x **bajo** f , o que $f(x)$ es el **valor de f en x** . x se llama la **variable independiente** e y la **variable dependiente**.

Notación: Si f es una función de A en B , también escribimos $f : A \rightarrow B$ ó $A \xrightarrow{f} B$, ó más explícitamente

$$f : A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y = f(x).$$

Ejemplo 10.1

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{10, 20, 30\},$$

$$C = \{5, 6, 7, 8\}, \quad D = \{40, 50, 60\}.$$

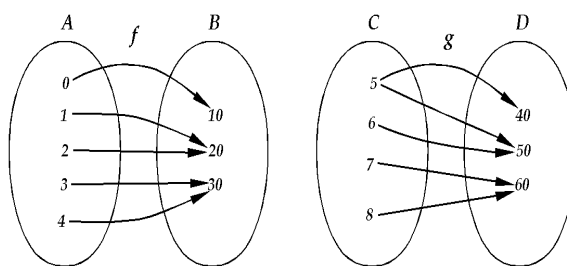


Figura 10.1

Si f y g son las reglas definidas mediante estos diagramas, tenemos que: f asigna a cada valor del conjunto A un sólo valor del conjunto B , luego f es una función de A en B , pero como g asigna al número 5 dos valores distintos 40 y 50 del conjunto D , g no es una función de C en D .

Dominio y rango de una función

Si A y B son conjuntos y f es una **función** de A en B , el conjunto A se llama **dominio** de la función y se denota D_f . El rango de f , denotado R_f , es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ cuando x toma todos los valores en el dominio, es decir,

$$R_f = \{f(x) / x \in A\}.$$

Si f es una función de A en B , y tanto A como B son subconjuntos de $\mathbb{R}$, decimos que f es una **función real de variable real**.

En adelante trabajaremos con funciones reales de variable real.

Evaluación de una función

Evaluar una función en un punto es hallar el valor de la función en ese punto. Para ello se reemplaza la variable independiente por ese punto y se calcula el valor de la variable dependiente, es decir, se encuentra el valor de f en dicho punto.

Ejemplo 10.2

Sea $f(x) = 4x^2 + 5x$. Calcule

1. el valor de f en -2 ,
2. $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, si a y h son números reales y $h \neq 0$.

Solución

1. Para evaluar f en -2 escribimos $f(-2) = 4(-2)^2 + 5(-2) = 6$. Entonces f de -2 es igual a 6, es decir, 6 es la imagen de -2 bajo la función f . Note que el dominio de f es $\mathbb{R}$ ya que la expresión $4x^2 + 5x$ está definida para cualquier número real.
¿Cuál es el rango de f ?
2. Primero, evaluemos f en a y en $a+h$, es decir, hallemos $f(a)$ y $f(a+h)$:

$$\begin{aligned}f(a) &= 4a^2 + 5a, \\f(a+h) &= 4(a+h)^2 + 5(a+h) \\&= 4(a^2 + 2ah + h^2) + 5a + 5h \\&= 4a^2 + 8ah + 4h^2 + 5a + 5h.\end{aligned}$$

Luego, realizamos las operaciones indicadas:

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{4a^2 + 8ah + 4h^2 + 5a + 5h - (4a^2 + 5a)}{h} \\
&= \frac{8ah + 4h^2 + 5h}{h} \\
&= \frac{h(8a + 4h + 5)}{h} \\
&= 8a + 4h + 5.
\end{aligned}$$

Determinación del dominio de una función

En los ejemplos anteriores fue fácil determinar el dominio de la función, ya que las reglas que definían las funciones tenían sentido para todos los números reales, pero hay otras funciones como las que involucran radicales o cocientes, que no están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$.

Recordemos que las expresiones fraccionarias no están definidas para los valores que hacen cero el denominador, y las expresiones que involucran raíces pares sólo tienen sentido para los valores que hacen positiva o 0 la cantidad subradical (estas últimas expresiones las consideraremos mas adelante).

Ejemplo 10.3

Halle el dominio de la función f definida por

$$f(x) = \frac{1}{9x^2 - 4}.$$

Solución

Para que la expresión tenga sentido, el denominador debe ser diferente de 0. Entonces el dominio de f es:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 9x^2 - 4 \neq 0\}.$$

Los valores x para los cuales $9x^2 - 4 = 0$ están excluidos del dominio:

$$\begin{aligned}
0 &= 9x^2 - 4 = (3x + 2)(3x - 2) \\
3x + 2 &= 0 \quad \text{ó} \quad 3x - 2 = 0 \\
x &= -\frac{2}{3} \quad \text{ó} \quad x = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el dominio de f es:

$$\begin{aligned}
D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq -\frac{2}{3} \text{ y } x \neq \frac{2}{3}\right\} \\
&= \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right).
\end{aligned}$$

Gráfica de una función

Definición:

Un sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas, llamado también **plano cartesiano** o **plano xy**, está formado por dos rectas coordenadas perpendiculares, llamadas ejes coordenados, que se intersecan en un punto llamado origen.

La recta horizontal se llama eje x y la recta vertical eje y. Generalmente se elige la dirección positiva del eje x hacia la derecha y la dirección positiva del eje y hacia arriba.

A cada punto, P, del plano le corresponde una pareja de números reales (a, b) , donde a es el punto sobre el eje x y b es el punto sobre el eje y. Los puntos del plano suelen representarse por el conjunto:

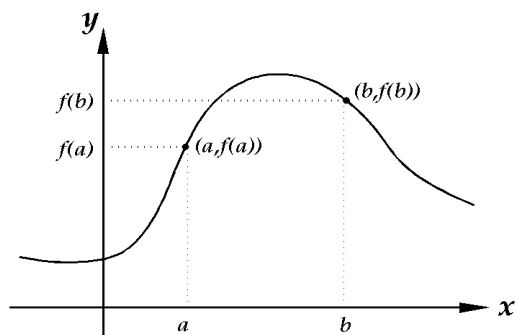
$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

Definición:

Si f es una función con dominio A , la gráfica de f es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) / x \in A\}.$$

Se puede interpretar el valor de $f(x)$ en la gráfica como la altura de la gráfica arriba del punto x .



Gráfica de una función f

Figura 10.2

Observamos que la gráfica de f es un subconjunto del plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Prueba de la recta vertical

Una curva en el plano xy es la gráfica de una función si y sólo si ninguna recta vertical corta la curva más de una vez.

Ejemplo 10.4

Consideremos las siguientes curvas en el plano xy y veamos si corresponden a gráficas de funciones.

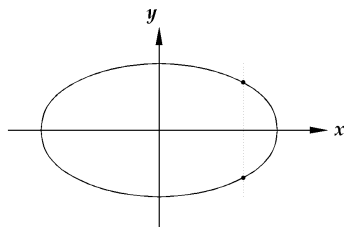


Figura 10.3

No corresponde a la gráfica de una función ya que existen rectas verticales que cortan la curva en dos puntos distintos.

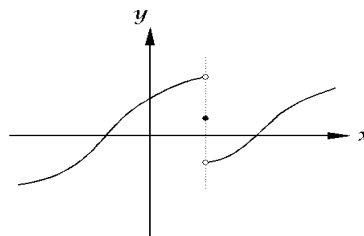


Figura 10.4

Sí corresponde a la gráfica de una función ya que cualquier recta vertical corta la gráfica a lo sumo en un punto.

Algunas funciones básicas y sus gráficas

Funciones lineales

Una **función lineal** es una función de la forma $f(x) = mx + b$, donde m y n son constantes. Se llama lineal porque su gráfica es una línea recta, en el plano $\mathbb{R}^2$.

La constante m se llama **pendiente** de la recta, y es la tangente del ángulo de inclinación de la recta (ángulo que forma la recta con el *semieje* x positivo, medido en sentido antihorario, desde el *semieje* x positivo hasta encontrar por primera vez la recta). La constante b es la coordenada del punto donde la recta intercepta el *eje* y , que corresponde al punto de la recta para el cual x es 0.

Usualmente lo anterior se simplifica diciendo que $y = f(x) = mx + b$ es una ecuación de una línea recta con pendiente m , que intercepta al *eje* y en el punto $(0, b)$. Esta ecuación se conoce con el nombre de ecuación de la recta en la forma pendiente intercepto.

Sabemos que en el plano una línea recta está completamente determinada por dos puntos distintos.

Si una recta pasa por los puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, podemos demostrar que la pendiente m de dicha recta está dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

La pendiente es la razón entre el desplazamiento vertical y el desplazamiento horizontal, cuando pasamos de un punto a otro sobre la recta.

$$m = \frac{\text{desplazamiento vertical}}{\text{desplazamiento horizontal}}$$

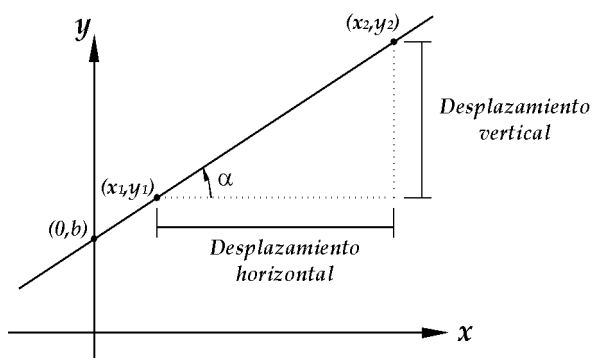


Figura 10.5

$$\text{Recta } y = mx + b$$

$$\text{Pendiente: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{Ángulo de inclinación: } \alpha \quad (m = \tan \alpha)$$

$$\text{Intersección con el eje } y: (0, b)$$

Si una recta pasa por los puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$, donde $x_1 \neq x_2$, una ecuación para dicha recta es

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

que es equivalente a $y = mx + b$, con $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, y $b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1$.

Siempre podemos escribir la ecuación de una línea recta en el plano en la forma

$$ax + by + c = 0, \text{ con } a, b \text{ y } c \text{ constantes.}$$

Esta última ecuación se conoce con el nombre de forma general de la ecuación de la recta en el plano.

Ejemplo 10.5

Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0, -1)$ y $(1, 1)$.

Solución

Primero calculamos la pendiente m de la recta $y = mx + b$ empleando los puntos $(x_1, y_1) = (0, -1)$ y $(x_2, y_2) = (1, 1)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-1)}{1 - 0} = 2.$$

Para obtener b basta con reemplazar cualquiera de los puntos en la ecuación, es decir, reemplazando (por ejemplo) el punto $(x_1, y_1) = (0, -1)$ en la ecuación $y = 2x + b$, obtenemos que $-1 = 2(0) + b \Rightarrow b = -1$. Concluimos que la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos es $y = 2x - 1$.

Notas:

1. La pendiente no está definida para rectas verticales, ya que dos puntos cualesquiera sobre una de estas rectas tienen la misma componente en x . La ecuación de una recta vertical es de la forma $x = b$, donde b es una constante.
2. La pendiente de una recta horizontal es siempre igual a 0. ¿Por qué?

Rectas paralelas y perpendiculares

Sean L_1 y L_2 dos rectas distintas no verticales, con pendientes m_1 y m_2 respectivamente,

$$\begin{aligned} L_1 \parallel L_2 &\iff m_1 = m_2, \\ L_1 \perp L_2 &\iff m_1 \cdot m_2 = -1. \end{aligned}$$

Para las rectas verticales, el paralelismo y la perpendicularidad, se definen sólo con las relaciones entre ángulos.

Ejercicios

1. Evalúe las siguientes funciones en los valores indicados.

(a) $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$; $g\left(\frac{1}{2}\right)$, $g(a)$, $g(a-1)$.

(b) $f(x) = \frac{|x|}{x}$; $f(-5)$, $f(y^2)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. Para cada una de las siguientes funciones, calcule el valor de $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

(a) $f(x) = \frac{x}{2x-1}$.

(b) $f(x) = x^3$.

3. Encuentre el dominio de las siguientes funciones:

(a) $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$.

(b) $g(x) = \frac{x}{2x^2 + x - 1}$.

4. Halle la ecuación de la recta que cumpla las condiciones dadas:

(a) Pasa por $(-3, 5)$ y tiene pendiente $-\frac{7}{2}$.

(b) Tiene pendiente $\frac{2}{5}$ y cruza el eje y en $y = 4$.

(c) Pasa por $(2, 6)$ y es perpendicular a la recta $y = 1$.

(d) Pasa por $(-2, 20)$ y es paralela a la recta que pasa por $(1, 1)$ y $(5, -1)$.

5. Demuestre que las rectas que corresponden a las ecuaciones $3x+5y+7=0$ y $5x-3y-2=0$ son perpendiculares.

6. Obtenga el valor de k de tal manera que las rectas con ecuaciones $3kx+8y=-5$ y $2y-8kx=-1$ sean perpendiculares.

Ecuaciones I: Ecuaciones lineales, ecuaciones cuadráticas

Definición

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos, llamados incógnitas o variables, relacionados mediante operaciones matemáticas.

Los siguientes son ejemplos de ecuaciones:

$$x^2 + 4 = 16,$$

$$3x + 5 = -1,$$

$$\sqrt{y-3} = 4,$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = 4,$$

$$2xy - 5x + 4y = 0.$$

Si en una ecuación se reemplazan las variables por números que convierten la ecuación en una proposición verdadera, decimos que dichos números son **soluciones** o **raíces** de la ecuación.

El conjunto de todas las soluciones de una ecuación se llama **conjunto solución** de la ecuación.

Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución.

Resolver una ecuación es encontrar todas las soluciones de la ecuación, y para ello transformamos la ecuación inicial en una ecuación equivalente más simple, usando las siguientes propiedades de la igualdad entre expresiones algebraicas:

Si A , B y C representan expresiones algebraicas:

1. Si a la igualdad $A = B$ le sumamos a ambos lados la expresión algebraica C , la igualdad se mantiene, es decir $A + C = B + C$
2. Si a la igualdad $A = B$ la multiplicamos a ambos lados por C ($C \neq 0$), la igualdad se mantiene, es decir $CA = CB$.

Ecuaciones lineales

Una ecuación **lineal** o de **primer grado** en x es una ecuación de la forma

$$ax + b = 0$$

con a y b constantes (números reales) y $a \neq 0$. En esta ecuación x es la variable o incógnita. Por ejemplo $2x + 3 = 23$ es una ecuación lineal ó de primer grado en la variable x .

La ecuación lineal $ax + b = 0$ tiene una única solución dada por $x = -\frac{b}{a}$ ya que como $ax + b = 0$ al sumar $-b$ a ambos lados obtenemos $ax + b - b = 0 - b$ de donde $ax = -b$, así que al multiplicar a ambos lados por $\frac{1}{a}$ llegamos a la igualdad $\frac{1}{a} \cdot ax = \frac{1}{a} \cdot (-b)$ que se puede simplificar para obtener el resultado final $x = -\frac{b}{a}$.

Ejemplo 11.1

Resuelva las siguientes ecuaciones lineales:

a) $5x - 3 = 7$,

b) $2y - \frac{y}{2} + \frac{y+1}{4} = 6y$.

Solución

- a) Debemos transformar la ecuación original en una equivalente, que sólo involucre la variable y su valor, es decir, debemos “despejar la variable”

$$\begin{array}{ll} 5x - 3 = 7, & \text{(Ecuación original)} \\ 5x - 3 + 3 = 7 + 3, & \text{(Se suma 3 a cada lado)} \\ 5x = 10, & \text{(Se realizan las operaciones)} \\ \frac{1}{5} \cdot 5x = \frac{1}{5} \cdot 10, & \text{(Se multiplica por } \frac{1}{5} \text{ cada lado)} \\ x = 2. & \text{(Se realizan las operaciones).} \end{array}$$

Entonces que $x = 2$ es la solución de la ecuación.

Para verificar que $x = 2$ es la solución reemplazamos x por 2 en la ecuación original, así:

$5(2) - 3 = 10 - 3$ y obtenemos $7 = 7$ que es una proposición verdadera. Luego $x = 2$ si es la solución de la ecuación $5x - 3 = 7$.

- b) Simplificamos la ecuación original, realizando las operaciones indicadas en cada lado de la igualdad:

$2y - \frac{y}{2} + \frac{y+1}{4} = 6y$, es decir $\frac{8y - 2y + y + 1}{4} = 6y$ ó $7y + 1 = 24y$, donde podemos sumar a ambos lados $-24y$ para obtener $7y + 1 - 24y = 24y - 24y$ ó $-17y + 1 = 0$, que es una ecuación lineal que sabemos tiene una única solución dada por $y = \frac{1}{17}$, que puede ser obtenida como se mostró antes.

Ecuaciones cuadráticas y de orden superior

Una **ecuación cuadrática** o de **segundo grado en x** , es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

con a , b y c constantes (números reales) y $a \neq 0$. En esta ecuación, x es la variable o incógnita. Por ejemplo, $3x^2 + 2x - 1 = 0$ y $4x^2 + 2 = 0$ son ecuaciones cuadráticas.

Las ecuaciones cuadráticas en una variable pueden tener una raíz de multiplicidad 2, es decir dos soluciones iguales, dos soluciones distintas, o no tener solución real.

- Las ecuaciones cuadráticas pueden resolverse usando factorización y la siguiente propiedad:

$$AB = 0 \text{ si y sólo si } A = 0 \text{ ó } B = 0,$$

con A y B expresiones algebraicas.

Para utilizar esta propiedad agrupamos todos los términos a un lado de la igualdad, de tal forma que el otro lado de la igualdad sea **cero** ($= 0$).

Estas ideas también se pueden usar para resolver **ecuaciones polinómicas** de cualquier grado.

Ejemplo 11.2

Resuelva las ecuaciones:

- a) $x^2 + 3x - 4 = 0$,
- b) $(x + 2)^2 = 9$,
- c) $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$.

Solución

- a) Factorizamos el lado izquierdo de la ecuación y obtenemos $(x + 4)(x - 1) = 0$. Luego, $x + 4 = 0$ ó $x - 1 = 0$, por lo tanto $x = -4$ ó $x = 1$. Así, las soluciones de la ecuación son $x = -4$ y $x = 1$.

Verificamos que éstas son soluciones reemplazando los valores de x en la ecuación original:

$$(-4)^2 + 3(-4) - 4 = 16 - 12 - 4 = 0,$$

$$(1)^2 + 3(1) - 4 = 1 + 3 - 4 = 0.$$

Como -4 y 1 satisfacen la ecuación original, son efectivamente las soluciones de la ecuación

$$x^2 + 3x - 4 = 0.$$

b) $(x + 2)^2 = 9$, es decir, $(x + 2)^2 - 9 = 0$ que al factorizar se convierte en $(x + 2 + 3)(x + 2 - 3) = 0$, es decir, $(x + 5)(x - 1) = 0$. Luego, $x = -5$ y $x = 1$ son las raíces de la ecuación original (Verificarlo).

e) $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$ puede factorizarse por factor común para obtener $x(x^2 + 5x + 6) = 0$ y posteriormente el trinomio entre paréntesis puede ser factorizado de tal manera que $x(x + 3)(x + 2) = 0$. Luego las soluciones de esta ecuación son $x = 0$, $x = -3$ y $x = -2$.

- En algunos casos la ecuación cuadrática puede llevarse a la forma del ejemplo b) anterior, escribiendo a un lado de la ecuación los términos que involucran la variable y en el otro los términos independientes, para luego convertir la expresión que involucra la variable en un cuadrado perfecto, sumando o restando un número adecuado, que también debe sumarse o restarse al otro lado de la ecuación, para conservar la igualdad. Este procedimiento se conoce como **completación del cuadrado**. Es decir,

$$x^2 + bx + c = 0$$

es equivalente a

$$x^2 + bx = -c.$$

Para completar un cuadrado perfecto a la izquierda, debemos sumar a ambos lados de la ecuación $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, es decir,

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = -c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

y así el lado izquierdo de la ecuación es $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$. Si el lado derecho es una cantidad positiva, podemos continuar transformando la ecuación para obtener una diferencia de cuadrados igual a 0, y luego procedemos como en el ejemplo anterior.

Si el lado derecho es una cantidad negativa, la ecuación no tiene solución real ¿Por qué?

En forma similar se trabajan las ecuaciones de la forma $x^2 - bx + c = 0$.

Ejemplo 11.3

Resuelva la ecuación $x^2 - 4x + 2 = 0$.

Solución

$$\begin{array}{ll} x^2 - 4x + 2 = 0, & \text{(Ecuación original)} \\ x^2 - 4x = -2, & \text{(Ecuación equivalente)} \\ x^2 - 4x + \left(-\frac{4}{2}\right)^2 = -2 + \left(-\frac{4}{2}\right)^2, & \text{(Completamos el cuadrado)} \\ x^2 - 4x + 4 = -2 + 4, & \text{(Realizamos operaciones)} \\ (x - 2)^2 = 2, & \text{(Factorizamos)} \\ (x - 2)^2 - 2 = 0, & \text{(Igualamos a 0)} \\ [(x - 2) + \sqrt{2}] [(x - 2) - \sqrt{2}] = 0, & \text{(Factorizamos)} \\ x = 2 \pm \sqrt{2}. & \text{(Obtenemos las raíces)} \end{array}$$

Luego, las soluciones de la ecuación son: $x = 2 + \sqrt{2}$ y $x = 2 - \sqrt{2}$.

Cuando el coeficiente del término en x^2 es diferente de 1, se factorizan los términos que contienen la variable tomando como factor común el coeficiente del término en x^2 , es decir,

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c, \quad a \neq 1,$$

y luego se completa el cuadrado de la expresión que está dentro del paréntesis.

Es importante tener en cuenta que al sumar una cantidad dentro del paréntesis, al otro lado debe sumarse la misma expresión multiplicada por el coeficiente de x^2 .

Ejemplo 11.4

Resuelva la ecuación $3x^2 - 6x - 1 = 0$.

Solución

Tenemos que $3x^2 - 6x - 1 = 0$, así que después de sumar 1 a ambos lados podemos obtener $3x^2 - 6x = 1$ o lo que es lo mismo $3(x^2 - 2x) = 1$. Para completar el cuadrado dentro del paréntesis debemos sumar 1 allí y por lo tanto 3 al lado derecho, es decir $3(x^2 - 2x + 1) = 1 + (3)(1)$.

En este paso ya podemos factorizar para obtener $3(x - 1)^2 = 4$, es decir $3(x - 1)^2 - 4 = 0$ que puede ser factorizado nuevamente como $(\sqrt{3}(x - 1) + 2)(\sqrt{3}(x - 1) - 2) = 0$.

Así, las soluciones de la ecuación son:

$$x = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ y } x = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

- Usando la técnica de completar el cuadrado, puede probarse que las raíces de cualquier ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Esta última se conoce como la **fórmula cuadrática**.

En este caso la factorización de la ecuación original sería

$$a \left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = 0.$$

- Se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática, y se denota por D , a la expresión $b^2 - 4ac$, es decir,

$$D = b^2 - 4ac.$$

Con base en la fórmula cuadrática, las siguientes proposiciones son verdaderas:

1. Si $D > 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si $D = 0$ la ecuación tiene una solución real de multiplicidad 2.
3. Si $D < 0$ la ecuación no tiene soluciones reales. (Las soluciones son números complejos)

Ejemplo 11.5

Encuentre las soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones:

- a) $z^2 + 5z + 3 = 0$,
- b) $9x^2 - 12x + 4 = 0$,
- c) $5x^2 - 7x + 5 = 0$.

Solución

- a) En este caso, $a = 1$, $b = 5$ y $c = 3$, así que $D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(1)(3) = 13 > 0$, y podemos esperar dos raíces reales distintas. Reemplazando en la fórmula cuadrática tenemos:

$$z = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Luego, las soluciones son $z = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$ y $z = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}$.

- b) En este caso, $a = 9$, $b = -12$ y $c = 4$, de donde $D = 144 - 144 = 0$ y concluimos que debemos encontrar una raíz real de multiplicidad 2. Usando la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4(9)(4)}}{2(9)} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

Luego, la ecuación tiene una raíz de multiplicidad 2, $x = \frac{2}{3}$.

- c) Ahora, como $a = 5$, $b = -7$ y $c = 5$, entonces $D = -51 < 0$ y la ecuación no tiene raíces reales. Veámoslo:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4(5)(5)}}{2(5)} = \frac{7 \pm \sqrt{-51}}{10}.$$

Como $\sqrt{-51}$ no es un número real, la ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales.

Ejercicios

1. Encuentre, si es que existen, todas las soluciones reales de la ecuación:

(a) $2x + 7 = 31$

(b) $-7w = 15 - 2w$

(c) $5t - 13 = 12 - 5t$

(d) $2x - \frac{x}{2} + \frac{x+1}{4} = 6x$

2. Resuelva la ecuación para la variable indicada:

(a) $\frac{ax+b}{cx+d} = 2$ resuelva para x .

(b) $\frac{a+1}{b} = \frac{a-1}{b} + \frac{b+1}{a}$ resuelva para a .

3. Resuelva por factorización:

(a) $x^2 + x - 12 = 0$.

(b) $4x^2 - 4x - 15 = 0$.

4. Resuelva completando el cuadrado:

(a) $x^2 + 2x - 5 = 0$.

(b) $3x^2 - 6x - 1 = 0$.

(c) $-2x^2 + 6x + 3 = 0$.

5. Halle el discriminante de las siguientes ecuaciones, determine cuantas soluciones reales tiene y encuéntrelas:

(a) $x^2 + 3x + 1 = 0$.

(b) $3x^2 - 6x + 1 = 0$.

(c) $5x^2 - 7x + 5 = 0$.

Ecuaciones II: Otros tipos de ecuaciones. La circunferencia

Otros tipos de ecuaciones

Algunas ecuaciones se presentan en otras formas, las cuales, mediante operaciones algebraicas, se transforman en ecuaciones lineales o cuadráticas.

1. Ecuaciones en las que la variable o variables hacen parte del denominador de expresiones fraccionarias

Si en una ecuación las variables aparecen en los denominadores de expresiones fraccionarias, realizamos las operaciones indicadas, y analizamos la expresión simplificada para determinar qué ecuación debe resolverse.

Ejemplo 12.1

Resuelva la ecuación $\frac{10}{x} - \frac{12}{x-3} + 4 = 0$.

Solución

Primero realizamos las operaciones indicadas al lado izquierdo de la ecuación, así:

$\frac{10}{x} - \frac{12}{x-3} + 4 = 0$ puede ser sumado como $\frac{10(x-3) - 12x + 4x(x-3)}{x(x-3)} = 0$ para obtener $\frac{10x - 30 - 12x + 4x^2 - 12x}{x(x-3)} = 0$, que después de simplificar el numerador se convierte en $\frac{4x^2 - 14x - 30}{x(x-3)} = 0$ ó $\frac{2(2x^2 - 7x - 15)}{x(x-3)} = 0$.

Como $x(x-3)$ no puede ser cero porque la división por cero no está definida, entonces, para que el cociente sea igual a cero, el numerador tiene que ser igual a cero, y como $2 \neq 0$, la única posibilidad es que $2x^2 - 7x - 15 = 0$. Es decir, nuestro problema se reduce a resolver la ecuación cuadrática

$$2x^2 - 7x - 15 = 0, \text{ es decir, } (2x + 3)(x - 5) = 0.$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación original son $x = -\frac{3}{2}$ y $x = -5$. (Verificarlo).

2. Ecuaciones en las que la variable o variables son parte de cantidades subradicales

Si en la ecuación sólo aparece un radical, la escribimos de tal forma que a un lado de la igualdad sólo aparezca el radical, luego elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación. Con este procedimiento la ecuación resultante puede tener raíces que no lo sean de la ecuación original, por lo que debemos determinar cuáles de las raíces de la ecuación resultante son raíces de la ecuación original.

Ejemplo 12.2

Resuelva la ecuación $\sqrt{5-x} + 1 = x - 2$.

Solución

$\sqrt{5-x} + 1 = x - 2$, es decir, $\sqrt{5-x} = x - 3$, de donde $(\sqrt{5-x})^2 = (x-3)^2$ ó $5-x = x^2 - 6x + 9$, por lo tanto $x^2 - 5x + 4 = 0$ que al factorizarse produce

$$(x-4)(x-1) = 0.$$

Luego, $x = 4$ y $x = 1$ son las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Veamos si son raíces de la ecuación original $\sqrt{5-x} + 1 = x - 2$:

Al reemplazar x por 4 en esta ecuación tenemos:

$$\sqrt{5-4} + 1 = 4 - 2,$$

ya que $2 = 2$. Luego $x = 4$, que es solución de $x^2 - 5x + 4 = 0$, lo es también de la ecuación original $\sqrt{5-x} + 1 = x - 2$.

Al reemplazar $x = 1$ en la ecuación original, tenemos

$$\sqrt{5-1} + 1 \neq 1 - 2,$$

ya que $3 \neq -1$. Luego, $x = 1$ que es solución de $x^2 - 5x + 4 = 0$, no lo es de la ecuación original.

Entonces, la única solución de la ecuación original es $x = 4$.

Si en la ecuación aparece más de un radical con variables en su interior, se escribe uno de éstos a un lado y los demás al otro lado, de la igualdad y se realizan las operaciones. El procedimiento se repite hasta que desaparezcan todos los radicales.

3. Ecuaciones de la forma $x^{2n} \pm x^n + c = 0$

Estas ecuaciones se pueden transformar en ecuaciones cuadráticas utilizando otra variable en reemplazo de x^n . Si $y = x^n$, la ecuación original se escribe como $y^2 \pm y + c = 0$, que es una ecuación cuadrática en la variable y , la cual sabemos resolver. Conociendo

los valores de y que satisfacen esta nueva ecuación, los reemplazamos en $y = x^n$, y hallamos los correspondientes valores de x que son las soluciones de la ecuación original. El procedimiento anteriormente descrito se llama **solución de ecuaciones usando cambio de variable**.

Ejemplo 12.3

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Solución

Como la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ puede escribirse como $(x^2)^2 - 5(x^2) + 4 = 0$, hacemos $y = x^2$ y entonces la ecuación original puede escribirse como $y^2 - 5y + 4 = 0$, la cual sabemos resolver.

En efecto, factorizando el lado derecho de $y^2 - 5y + 4 = 0$ obtenemos $(y - 4)(y - 1) = 0$ entonces $y = 4$ y $y = 1$ son las soluciones de la nueva ecuación. Como $y = x^2$, para $y = 4$, $x = \pm 2$ y para $y = 1$, $x = \pm 1$.

Luego, las soluciones de la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ son $x = \pm 2$, $x = \pm 1$.

Observemos que la ecuación tiene 4 raíces y el grado del polinomio en el miembro de la izquierda de la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, es 4.

4. Ecuaciones con valor absoluto

Para resolver ecuaciones que involucren valor absoluto, recordemos que $|a| = a$ ó $|a| = -a$ según se tenga $a \geq 0$ ó $a < 0$, respectivamente.

Ejemplo 12.4

Resuelva la ecuación $|3x + 5| = 1$.

Solución

De acuerdo con la definición de valor absoluto,

$$3x + 5 = 1 \quad \text{ó} \quad -(3x + 5) = 1$$

- Si $3x + 5 = 1$ entonces $3x = -4$, es decir $x = -\frac{4}{3}$
- Si $-(3x + 5) = 1$ entonces $3x + 5 = -1$, es decir $3x = -6$ lo cual implica $x = -2$.

Luego, las soluciones de la ecuación $|3x + 5| = 1$ son $x = -2$ y $x = -\frac{4}{3}$.

Verifiquemos que estos dos valores de x satisfacen la ecuación original

Si $x = -2$, $|3(-2) + 5| = |-6 + 5| = |-1| = 1$.

$$\text{Si } x = -\frac{4}{3}, \left| 3\left(-\frac{4}{3}\right) + 5 \right| = |-4 + 5| = |1| = 1.$$

La circunferencia

Para encontrar la ecuación de una circunferencia en el plano estudiaremos primero el concepto de distancia entre dos puntos en el plano.

Distancia

La distancia entre dos puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ del plano, denotada por $d(P, Q)$, es la longitud del segmento de recta que los une, y está dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ejemplo 12.5

¿Cuál de los puntos $A = (-6, 3)$ ó $B = (3, 0)$ está más cercano al punto $C = (-2, 1)$?

Solución

Calculamos la distancia de cada uno de los puntos A y B a C

$$d(A, C) = \sqrt{(-6 - (-2))^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} \text{ y}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}.$$

Luego, $d(A, C) < d(B, C)$, entonces A está más cercano a C .

Recordemos que una **circunferencia** es una curva cerrada formada por todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado **centro**. A la distancia fija la llamamos **radio** de la circunferencia, y la denotamos por r .

Sea $C = (h, k)$ el centro de una circunferencia de radio r . Si $X = (x, y)$ es cualquier punto de esta circunferencia, entonces

$$d(X, C) = r, \text{ es decir:}$$

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r.$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad tenemos que

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

Esta última ecuación es la ecuación de una circunferencia con centro $C = (h, k)$ y radio r .

Si la circunferencia tiene el centro en el origen de coordenadas, entonces $h = 0$ y $k = 0$ y la ecuación se reduce a

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

La ecuación de la circunferencia puede escribirse en la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

con a, b y c constantes.

Ejemplo 12.6

Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene centro en $(-4, 2)$ y radio 2. Grafique esta circunferencia.

Solución

En general, tenemos que la ecuación de la circunferencia de centro (h, k) y radio r es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

En este caso, $h = -4$, $k = 2$ y $r = 2$ y entonces la ecuación de la circunferencia es

$$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 2^2 = 4.$$

Si realizamos las operaciones indicadas en esta ecuación tenemos que

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 4, \text{ y simplificando}$$

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 16 = 0.$$

Luego, la ecuación $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 16 = 0$ también representa la circunferencia de centro en $(-4, 2)$ y radio 2.

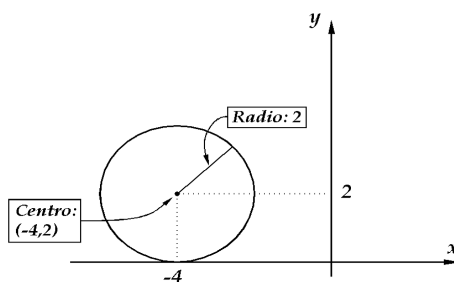


Figura 12.1

Ejemplo 12.7

Muestre que la ecuación

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x + 2y + \frac{1}{16} = 0$$

representa una circunferencia y determine el centro y el radio de esta circunferencia.

Solución

Debemos expresar la ecuación dada en la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x + 2y + \frac{1}{16} &= 0, \\x^2 + \frac{1}{2}x + y^2 + 2y &= -\frac{1}{16},\end{aligned}$$

donde podemos completar dos trinomios cuadrados perfectos, es decir

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) + (y^2 + 2y + 1) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + 1,$$

para obtener

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + (y + 1)^2 = 1.$$

Luego, la ecuación representa una circunferencia de centro en $\left(-\frac{1}{4}, -1\right)$ y radio 1.

Ejercicios

1. Encuentre, si es que existen, todas las soluciones reales de la ecuación:

(a) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{4}$

(b) $\frac{x}{2x+7} - \frac{x+1}{x+3} = 1$

(c) $2x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

(d) $x^{4/3} - 5x^{2/3} + 6 = 0$

(e) $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} - 4 = 0$

(f) $|3x + 5| = 1$

(g) $|x + 2| = |2x - 1|$

2. Halle la ecuación de la circunferencia que tiene como centro el punto $C(3, -1)$ y que contiene al punto $(-1, 0)$. Grafique.

3. Halle la ecuación de la circunferencia que tiene un diámetro con extremos en los puntos $A(-2, 1)$ y $B(1, -3)$. Grafique.

4. Halle la ecuación de la circunferencia que contiene los puntos $(0, 2)$, $(2, 0)$ y $(-1, \sqrt{3})$.

Sistemas de ecuaciones lineales 2x2

Sistemas de Ecuaciones Lineales en dos Variables

Un sistema de ecuaciones lineales en dos variables es un sistema de la forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (13.1)$$

donde a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 y c_2 son constantes (cantidades conocidas) y x y y son las variables o incógnitas (cantidades desconocidas).

En este caso, las gráficas de las ecuaciones del sistema son líneas rectas, llamémoslas L_1 y L_2 . El conjunto solución del sistema es la intersección de L_1 y L_2 .

Para dichas rectas L_1 y L_2 se da una y sólo una de las tres posibilidades siguientes:

1. L_1 y L_2 se cortan en un único punto.
2. L_1 y L_2 son paralelas.
3. L_1 y L_2 son coincidentes.

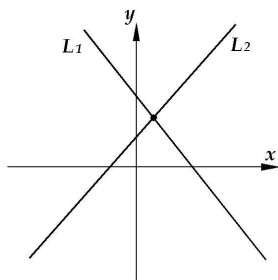


Figura 13.1

L_1 y L_2 se cortan en un único punto.

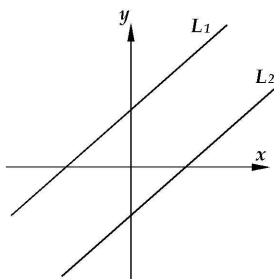


Figura 13.2

L_1 y L_2 son paralelas.

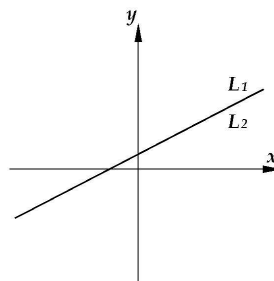


Figura 13.3

$L_1 = L_2$

De lo anterior podemos afirmar que si $a_1 \neq 0$ o $b_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$ o $b_2 \neq 0$, para el sistema de ecuaciones lineales (1) se da uno y sólo uno de los siguientes casos:

1. El sistema tiene solución única, y es el punto de intersección de las rectas L_1 y L_2 .
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene infinitas soluciones, siendo su conjunto solución una línea recta. Cualquiera de las dos ecuaciones del sistema es una ecuación para dicha recta.

Ejemplo 13.1

En el siguiente sistema de ecuaciones en las variables x, y

$$\begin{cases} 3x - 2y = -2 & \text{(Ecuación 1)} \\ 5x + y = 1 & \text{(Ecuación 2)} \end{cases}$$

el par ordenado $(0, 1)$ es una solución del sistema, ya que $(0, 1)$ es solución de cada una de las ecuaciones del sistema porque $3(0) - 2(1) = -2$ y $5(0) + 1 = 1$.

En la gráfica vemos que $(0, 1)$ es el punto de intersección de las rectas que corresponden a las gráficas de las ecuaciones 1 y 2.

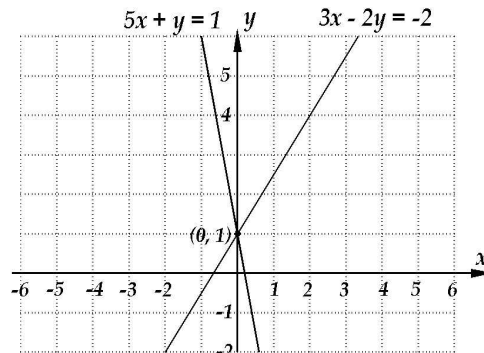


Figura 13.4

Método de sustitución

Consiste en despejar una de las variables de una de las ecuaciones y sustituirla en la otra obteniendo así una ecuación en una sola variable. Se resuelve esta última ecuación y el valor obtenido se reemplaza en la expresión hallada inicialmente para obtener el valor de la otra variable.

Los pasos a seguir en este procedimiento son:

1. Seleccionar una ecuación y “despejar” una de las variables.
2. Sustituir la expresión hallada en el paso 1 en la otra ecuación, para obtener una ecuación en una variable. Luego, resolver esta nueva ecuación para hallar el valor de esa variable.

3. Sustituir el valor encontrado en el paso 2 en la expresión hallada en el paso 1, para determinar el valor de la variable faltante, y en consecuencia, la solución del sistema.

Ejemplo 13.2

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x - 5y = 2 & \text{(Ecuación 1)} \\ 4x + 2y = 9 & \text{(Ecuación 2)} \end{cases}$$

Solución

De la ecuación 1 despejamos la variable x :

$$x = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}y. \quad (3)$$

Sustituimos el valor de x en la ecuación 2:

$$4\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}y\right) + 2y = 9.$$

Resolvemos esta ecuación en la variable y :

$$\frac{8}{3} + \frac{20}{3}y + 2y = 9, \text{ es decir } \frac{26}{3}y = 9 - \frac{8}{3} \text{ ó } \frac{26}{3}y = \frac{19}{3}, \text{ de donde } y = \frac{19}{26}.$$

Reemplazamos el valor de y en la ecuación (3) para obtener el respectivo valor de x :

$$x = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}\left(\frac{19}{26}\right) = \frac{52 + 95}{78} = \frac{147}{78}.$$

Por lo tanto, la única solución del sistema es $x = \frac{147}{78}$, $y = \frac{19}{26}$ o el par ordenado $\left(\frac{147}{78}, \frac{19}{26}\right)$.

Método de eliminación

Consiste en multiplicar una o las dos ecuaciones del sistema por constantes apropiadas de tal manera que al sumar ambas ecuaciones se elimine una de las variables del sistema. El procedimiento a seguir es:

1. Multiplicar una o las dos ecuaciones del sistema por las constantes adecuadas de tal manera que al sumar los coeficientes de una de las variables el resultado sea 0.
2. Sumar miembro a miembro ambas ecuaciones para eliminar una variable. Luego, resolver la ecuación resultante para determinar el valor de la variable restante.
3. Sustituir el valor hallado en el paso 2 en una de las ecuaciones originales y resolverla para determinar el valor de la variable eliminada en el paso 2 y obtener así la solución del sistema.

Ejemplo 13.3

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones por el método de eliminación:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 & \text{(Ecuación 1)} \\ 3x - 2y = 2 & \text{(Ecuación 2)} \end{cases}$$

Solución

Multiplicamos la ecuación 1 por 3 y la ecuación 2 por -2 , para que la suma del coeficiente de la variable x en la ecuación 1 y en la ecuación 2 sea 0:

$$\begin{cases} 6x + 15y = 3 & \text{(Ecuación 1')} \\ -6x + 4y = -4 & \text{(Ecuación 2')} \end{cases}$$

Ahora, sumamos miembro a miembro estas dos ecuaciones ($1' + 2'$) y despejamos y :

$$\begin{aligned} 0x + 19y &= -1, \\ y &= -\frac{1}{19}. \end{aligned}$$

Reemplazamos $y = -\frac{1}{19}$, por ejemplo, en la ecuación 2 y despejamos x :

$$\begin{aligned} 3x - 2\left(-\frac{1}{19}\right) &= 2, \\ 3x + \frac{2}{19} &= 2, \\ 3x &= 2 - \frac{2}{19}, \\ 3x &= \frac{36}{19}, \\ x &= \frac{12}{19}. \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = \frac{12}{19}$, $y = -\frac{1}{19}$ o el par ordenado $\left(\frac{12}{19}, -\frac{1}{19}\right)$.

Casos especiales

Ejemplo 13.4

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 7x - 2y = -1 & \text{(Ecuación 1)} \\ -14x + 4y = 3 & \text{(Ecuación 2)} \end{cases}$$

Si despejamos y de cada una de las ecuaciones obtenemos

$$\begin{cases} y = \frac{7}{2}x + \frac{1}{2} & \text{(Ecuación 1')} \\ y = \frac{7}{2}x + \frac{3}{4} & \text{(Ecuación 2')} \end{cases} .$$

Podemos concluir que las gráficas de las ecuaciones del sistema son dos rectas paralelas diferentes, ya que tienen la misma pendiente y los términos independientes son diferentes. Por lo tanto, el sistema no tiene solución.

Ejemplo 13.5

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y = 1 & \text{(Ecuación 1)} \\ -2x + 2y = -2 & \text{(Ecuación 2)} \end{cases}$$

Como la ecuación 2 es el resultado de multiplicar la ecuación 1 por -2 , las dos ecuaciones representan una misma línea recta y por tanto el sistema tiene infinitas soluciones, que son todos los puntos de la recta $x - y = 1$.

Para encontrar una solución particular del sistema, basta encontrar un punto sobre dicha recta dándole un valor particular a una de las variables y reemplazarlo en la ecuación para obtener el correspondiente valor de la otra variable, así, si $x = 3$, $3 - y = 1$ y entonces $y = 2$ y una solución sería $(3, 2)$.

Ejercicios

Resuelva el sistema o demuestre que no tiene solución. Si el sistema tiene una cantidad infinita de soluciones, expréselas en la forma de par ordenado $(t, y(t))$.

1. $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 6x + 4y = 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} -x + 2y = 6 \\ 3x - 4y = -2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} -x + 4y = 1 \\ 2x - 8y = -2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ -3x + 15y = 13 \end{cases}$

Modelado mediante ecuaciones

Tanto en matemáticas como en otras ciencias, y aún en situaciones de la vida real, encontramos problemas que involucran dos o más cantidades relacionadas entre sí y entonces debemos plantear y resolver un **modelo matemático**, que puede ser una **ecuación**, para relacionar y encontrar estas cantidades.

Para resolver este tipo de problemas es conveniente proceder de acuerdo con las siguientes instrucciones:

1. Leer cuidadosamente el problema resaltando la información más importante y, de ser posible, hacer un dibujo que ilustre la situación planteada indicando las cantidades conocidas en el problema.
2. Identificar claramente la cantidad o cantidades desconocidas (variables o incógnitas) que debemos encontrar y asignarles una letra. Por lo general éstas aparecen en la pregunta que plantea el problema. Si es posible se deben identificar en el dibujo hecho en 1.
3. Encontrar, en el enunciado del problema o en el dibujo, la información que permita relacionar las cantidades y las variables definidas en 1. y 2.
4. Plantear un modelo matemático o ecuación que permita expresar esta relación.
5. Resolver la ecuación, verificar la respuesta y responder en palabras las preguntas planteadas.

Ejemplo 14.1

Carlos invirtió \$ 120,000 en dos fondos de inversión diferentes. En uno de ellos a un interés simple de 4.5% por año y en el otro a una tasa de 4% anual. Después de un año, el dinero obtenido por intereses en las inversiones es de \$5,250 ¿Cuánto dinero invirtió en cada fondo?

Solución

Debemos determinar la cantidad de dinero invertida en cada fondo.

Sea x : cantidad de dinero, en pesos, invertida en el fondo al 4.5%.

Entonces:

$120000 - x$: cantidad de dinero, en pesos, invertida en el otro fondo al 4%.

$0.045x$: cantidad de dinero, en pesos, obtenida por intereses al invertir en el fondo al 4.5%.

$0.04(120000 - x)$: cantidad de dinero, en pesos, obtenida por intereses al invertir en el fondo que produce el 4%.

Ahora, como el dinero obtenido por intereses en las dos inversiones es de \$5250, entonces:

$$0.045x + 0.04(120000 - x) = 5250.$$

Resolviendo para x la ecuación planteada obtenemos:

$$0.045x + 0.04(120000 - x) = 5250$$

$$0.045x + 4800 - 0.04x = 5250$$

$$0.005x = 450$$

$$x = \frac{450}{0.005}$$

$$x = 90000.$$

Por lo tanto, Carlos invirtió \$90,000 al 4.5% y \$30,000 al 4%.

Ejemplo 14.2

Un hombre se aleja caminando de un poste cuya lámpara está 6 m por arriba del suelo. El hombre tiene una estatura de 2 m. ¿Cuánto mide la sombra del hombre cuando está a 10 m del poste?

Solución

El siguiente dibujo ilustra la situación planteada en el problema:

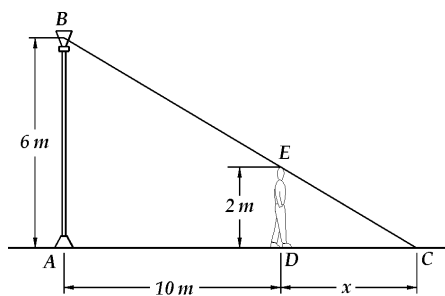


Figura 14.1

Sea x la longitud, en metros, de la sombra del hombre.

Como $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, aplicando el Teorema de Tales, obtenemos que $\triangle ABC \sim \triangle DEC$. Sabiendo que los lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales tenemos que

$$\frac{6}{10 + x} = \frac{2}{x}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{6}{10+x} - \frac{2}{x} &= 0 \\ \frac{6x - 2(10+x)}{x(10+x)} &= 0 \\ \frac{6x - 20 - 2x}{x(10+x)} &= 0 \\ 4x - 20 &= 0 \\ 4x &= 20 \\ x &= 5.\end{aligned}$$

Y entonces, la longitud de la sombra del hombre es de $5m$.

Ejemplo 14.3

Se tienen $128\pi \text{ cm}^2$ de hojalata para fabricar un envase cerrado en forma de cilindro circular recto.

1. Diseñe un modelo matemático para expresar el volumen V del envase en términos del radio r de la base.
2. ¿Para cuáles valores de r el volumen V del envase es igual a cero?

Solución

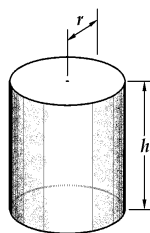


Figura 14.2

1. Sean:

r : radio, en cm , de la base del envase

h : altura, en cm , del envase

V : volumen , en cm^3 , del envase.

Como $V = \pi r^2 h$ y debemos expresar a V en términos de r únicamente, hallemos una expresión para h en términos de r .

La cantidad de material necesaria para construir el envase es igual al área superficial del envase, luego

$$128\pi = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Despejemos h :

$$\begin{aligned}128\pi &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \\128\pi - 2\pi r^2 &= 2\pi r h \\h &= \frac{128\pi - 2\pi r^2}{2\pi r} \\h &= \frac{64 - r^2}{r}.\end{aligned}$$

Sustituyendo h en V obtenemos:

$$V = \pi r^2 \left(\frac{64 - r^2}{r} \right) = \pi r(64 - r^2).$$

Luego, el volumen V del envase en términos de r es $V = \pi r(64 - r^2)$.

2. Si reemplazamos $V = 0$ en la expresión hallada en el numeral anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}\pi r(64 - r^2) &= 0 \\ \pi r(8 - r)(8 + r) &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $r = 0$, $r = 8$ ó $r = -8$. Sin embargo, como r es una distancia, no tomamos el valor de $r = -8$.

Entonces, el volumen es cero cuando el radio es 0 *cm*, o cuando el radio es de 8 *cm*. Observemos que si el radio es 0 no hay cilindro, y si el radio es 8 *cm*, la cantidad de hojalata sólo alcanza para hacer las dos tapas.

Ejemplo 14.4

María emprende un viaje desde Manizales hasta Cali, ciudades que están a una distancia de 300 km. Viaja un tramo en bus, y éste llega a la estación de tren justo a tiempo para que María continúe su viaje por tren. El bus viaja a una velocidad promedio de 40 km/h y el tren se mueve a 60 km/h. Si el viaje completo dura 5.5 horas ¿cuánto tiempo pasará María en el tren?

Solución

Sea t : tiempo, en horas, que María viaja en tren.

Entonces,

$5.5 - t$: tiempo, en horas, que María viaja en bus.

Como

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo},$$

tenemos que la distancia recorrida en tren es $60t$ y la distancia recorrida en bus es $40(5.5 - t)$.

Ahora, como la distancia total es 300 km, entonces

$$60t + 40(5.5 - t) = 300$$

$$60t + 220 - 40t = 300$$

$$20t = 80$$

$$t = 4.$$

Luego, María viajará 4 horas en el tren.

Ejercicios

1. Una caja rectangular tiene una base cuadrada. Su altura es la mitad del ancho de la base. Encuentre una función que modele su volumen en términos de su ancho.
2. La altura de un cilindro circular recto es cuatro veces su radio. Encuentre una función que modele el volumen del cilindro en términos de su radio.
3. La suma de dos números positivos es 60. Encuentre una función que modele su producto en términos de uno de los números.
4. El volumen de un cono es 100 pulg^3 . Encuentre una función que modele la altura del cono en términos de su radio.
5. Un alambre de 10 cm de largo se corta en dos trozos, uno de ellos de longitud x . Cada trozo se dobla en la forma de un cuadrado. Halle una función que modele el área total encerrada por los dos cuadrados, en términos de x .
6. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 8 cm. Exprese el área del triángulo como una función de la longitud de la base.

Desigualdades

Una desigualdad es una relación de orden que se da entre dos cantidades empleando los símbolos $<$, $\leq$, $>$ y $\geq$. Cuando en una o en las dos cantidades aparece una variable decimos que la desigualdad es **en una variable**.

Ejemplo 15.1

Las siguientes son desigualdades en una variable:

$$\begin{aligned} 2x + 7 &< 3, \\ 4y + 7 &\geq 2y - 3, \\ (4z - 1)^{-1} &> 0, \\ x^2 - 5x + 6 &\leq 0. \end{aligned}$$

Resolver una desigualdad en una variable es encontrar todos los valores de la variable que hacen verdadera la desigualdad.

Al conjunto de todas las soluciones de una desigualdad se le llama **conjunto solución de la desigualdad**.

Dos desigualdades son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución.

Para resolver una desigualdad la transformamos en una desigualdad equivalente, en la que la solución es obvia, y para ello usamos las propiedades de orden de los números reales, las cuales son también válidas para expresiones algebraicas:

Si A , B , C y D son expresiones algebraicas, entonces:

1. Si a los dos lados de una desigualdad sumamos (o restamos) la misma expresión, el símbolo de la desigualdad se conserva. Es decir, si $A \leq B$ entonces $A + C \leq B + C$ y $A - C \leq B - C$.
2. Al multiplicar los dos lados de una desigualdad por una expresión positiva, el símbolo de la desigualdad se conserva. Es decir, si $C > 0$ y $A \leq B$ entonces $CA \leq CB$.
3. Al multiplicar los dos lados de una desigualdad por una expresión negativa, la desigualdad “cambia de sentido”. Es decir, si $C < 0$ y $A \leq B$ entonces $CA \geq CB$.

4. Los recíprocos o inversos multiplicativos de dos expresiones positivas cambian el sentido de la desigualdad de las respectivas expresiones. Es decir, si $A > 0$, $B > 0$ y $A \leq B$ entonces $\frac{1}{A} \geq \frac{1}{B}$.
5. Si se suman dos desigualdades del mismo sentido, el símbolo de la desigualdad se conserva. Es decir, si $A \leq B$ y $C \leq D$ entonces $A + C \leq B + D$.

Estas propiedades son también válidas si en vez de $\leq$ tenemos los símbolos $\geq$, $<$ ó $>$.

Desigualdades lineales

Una desigualdad en una variable se dice **lineal** si el exponente de la variable es 1 y **no lineal** cuando el exponente de la variable es diferente de 1.

Ejemplo 15.2

Resuelva las siguientes desigualdades lineales.

a) $6 - x \leq 2x + 9$.

b) $-\frac{1}{2} \leq \frac{4 - 3x}{5} < \frac{1}{4}$.

Solución:

a) Empleando propiedades de orden de los números reales

$$\begin{aligned}
 6 - x &\leq 2x + 9 \\
 6 - x + x &\leq 2x + 9 + x, \\
 6 &\leq 3x + 9, \\
 6 - 9 &\leq 3x + 9 - 9, \\
 -3 &\leq 3x, \\
 \left(\frac{1}{3}\right)(-3) &\leq \left(\frac{1}{3}\right)(3x), \\
 -1 &\leq x.
 \end{aligned}$$

Luego, el conjunto solución es $\{x : x \geq -1\}$, es decir, el intervalo $[-1, \infty)$.

b) Empleando propiedades de orden de los números reales

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} &\leq \frac{4 - 3x}{5} < \frac{1}{4} \\
 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) &\leq 5 \cdot \left(\frac{4 - 3x}{5}\right) < 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right), \\
 -\frac{5}{2} &\leq 4 - 3x < \frac{5}{4}, \\
 -\frac{5}{2} - 4 &\leq 4 - 3x - 4 < \frac{5}{4} - 4, \\
 -\frac{13}{2} &\leq -3x < -\frac{11}{4},
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcccl} \frac{1}{-3} \cdot \left(-\frac{13}{2}\right) & \geq & \frac{1}{-3} \cdot (-3x) & > & \frac{1}{-3} \cdot \left(-\frac{11}{4}\right), \\ \frac{13}{6} & \geq & x & > & \frac{11}{12}, \end{array}$$

es decir

$$\frac{11}{12} < x \leq \frac{13}{6}.$$

Luego, el conjunto solución es el intervalo

$$\left(\frac{11}{12}, \frac{13}{6}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{11}{12} < x \leq \frac{13}{6}\right\}.$$

Desigualdades no lineales

Para resolver este tipo de desigualdades procedemos en forma similar a como lo hacemos en ecuaciones, es decir, aplicamos propiedades y realizamos operaciones hasta tener 0 a un lado de la desigualdad, y el otro lado factorizado, y resolvemos la desigualdad teniendo en cuenta las “leyes de signos”. Sean a, b y c números reales:

- Si $(a < 0 \text{ y } b < 0)$, o $(a > 0 \text{ y } b > 0)$ entonces $ab > 0$ y $\frac{a}{b} > 0$ si $b \neq 0$.
- Si $(a > 0 \text{ y } b < 0)$ o $(a < 0 \text{ y } b > 0)$ entonces $ab < 0$ y $\frac{a}{b} < 0$ si $b \neq 0$.
- $abc > 0$ si los tres factores son positivos, o si uno de ellos es positivo y los otros dos son negativos.
- $abc < 0$ si los tres factores son negativos, o si uno de ellos es negativo y los otros dos positivos.

Ejemplo 15.3

Halle el conjunto solución de la desigualdad $x^2 < x + 2$.

Solución:

1. Realizamos operaciones hasta tener 0 a un lado de la desigualdad:

$$x^2 - x - 2 < 0$$

2. Factorizamos el lado izquierdo:

$$(x - 2)(x + 1) < 0$$

3. Debemos hallar los valores para los cuales el producto de $x - 2$ y $x + 1$ es menor que 0.

Para ello primero ubicamos sobre la recta real los números para los cuales uno de los factores es 0, en este caso: $x = 2$ y $x = -1$, que definen los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ y $(2, \infty)$.

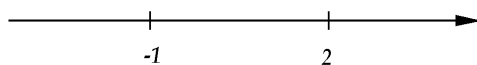


Figura 15.1

Luego analizamos sobre la recta real los signos de cada factor en cada uno de estos intervalos y con base en ellos determinamos el signo del producto y el intervalo donde dicho producto es negativo.

		-1		2	
		o		o	→
<i>Signo de (x - 2)</i>	-		-		+
<i>Signo de (x + 1)</i>	-		+		+
<i>Signo de (x - 2)(x + 1)</i>	+		-		+

Figura 15.2

- Finalmente analizamos si los extremos del intervalo satisfacen la desigualdad.

En este caso $x = 2$ y $x = -1$ no satisfacen la desigualdad ya que hacen cero el producto.

Luego, el conjunto solución de la desigualdad $x^2 < x + 2$ es

$$\{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 2\},$$

que es el intervalo $(-1, 2)$.

Ejemplo 15.4

Halle el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{3+x}{3-x}} - 1.$$

Solución

Sabemos que el dominio de f son los valores de x para los cuales

$$\frac{3+x}{3-x} - 1 \geq 0.$$

Resolvamos entonces tal desigualdad.

- Como ya tenemos 0 al lado derecho de la desigualdad entonces simplificamos el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} \frac{3+x}{3-x} - 1 &\geq 0, \\ \frac{2x}{3-x} &\geq 0. \end{aligned}$$

2. Ubicamos sobre la recta real los números que hacen 0 el numerador o el denominador, es decir $x = 0$ y $x = 3$, que definen los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$, $(3, \infty)$. Analizamos sobre la recta real el signo del numerador y del denominador en cada uno de estos intervalos y con base en ellos determinamos el signo del cociente y el intervalo donde el cociente es positivo.

		0		3	
		○		○	→
<i>Signo de $2x$</i>	-		+	+	
<i>Signo de $3 - x$</i>	+		+	-	
<i>Signo de $\frac{2x}{3-x}$</i>	-		+	-	

Figura 15.3

3. Analizamos si los extremos satisfacen la desigualdad.

Si $x = 3$ el cociente no está definido por lo tanto 3 no hace parte del conjunto solución.

Ahora, si $x = 0$,

$$\frac{2 \cdot 0}{3 - 0} = 0 \geq 0,$$

o sea que $x = 0$ satisface la desigualdad.

Luego, el conjunto solución de la desigualdad es

$$\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 3\} = [0, 3).$$

Sobre la recta real se representa así:



Figura 15.4

De esta forma, el dominio de la función es $[0, 3)$.

Ejemplo 15.5

Encuentre los valores de x que satisfacen la desigualdad:

$$\frac{x}{2} \geq \frac{5}{x+1} + 4.$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{x}{2} - \frac{5}{x+1} - 4 &\geq 0, \\ \frac{x(x+1) - 10 - 8(x+1)}{2(x+1)} &\geq 0, \\ \frac{x^2 + x - 10 - 8x - 8}{2(x+1)} &\geq 0, \\ \frac{x^2 - 7x - 18}{2(x+1)} &\geq 0, \\ \frac{(x-9)(x+2)}{2(x+1)} &\geq 0.\end{aligned}$$

$x = 9$ y $x = -2$ hacen cero el numerador y $x = -1$ hace cero el denominador. Estos tres números determinan los intervalos

$$(-\infty, -2), (-2, -1), (-1, 9) \text{ y } (9, \infty).$$

Analizamos sobre la recta real los signos de los factores del numerador y del denominador, y con base en ellos determinamos dónde el cociente es positivo.

		-2	-1		9	
		○	○		○	→
<i>Signo de $x - 9$</i>	-	-	-	-	+	
<i>Signo de $x + 2$</i>	-	+	+	+	+	
<i>Signo de $x + 1$</i>	-	-	+	+	+	
<i>Signo de $\frac{(x-9)(x+2)}{2(x+1)}$</i>	-	+	-	-	+	

Figura 15.5

Luego, el cociente es positivo si $-2 < x < -1$ o si $x > 9$.

Veamos si los extremos de los intervalos satisfacen la desigualdad:

Si $x = -2$ el numerador es igual a 0 y el denominador es diferente de 0 entonces $x = -2$ si satisface la desigualdad.

Similarmente comprobamos que $x = 9$ satisface la desigualdad.

Si $x = -1$ el numerador es diferente de 0, pero el denominador es 0, es decir, para $x = -1$ el lado izquierdo de la desigualdad no tendría sentido, luego, este valor de x no satisface la

desigualdad.

Entonces x satisface la desigualdad si

$$x \in ([-2, -1) \cup [9, \infty)),$$

es decir,

$$\{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x < -1 \text{ ó } x \geq 9\} = [-2, -1) \cup [9, \infty)$$

es el conjunto solución de la desigualdad.

Ejercicios

Resuelva las siguientes desigualdades.

1. $-2 \leq 3 - x < 2$.

2. $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{6} + x$.

3. $1 < 3x + 4 \leq 16$.

4. $\frac{1}{6} < \frac{2x - 13}{12} \leq \frac{2}{3}$.

5. $x^2 + 5x + 6 > 0$.

6. $x^3 - 4x > 0$.

7. $\frac{2x + 6}{x - 2} < 0$.

8. $-2 < \frac{x + 1}{x - 3}$.

9. $1 + \frac{2}{x + 1} \leq \frac{2}{x}$.

10. $\frac{6}{x - 1} - \frac{6}{x} \geq 1$.

11. $x^4 > x^2$.

12. $x^5 > x^2$.

Ángulos

Definición:

Un ángulo es la abertura formada por dos rayos que tienen un punto común llamado **vértice**. En realidad, dos rayos dan lugar a dos ángulos, y en cada caso particular quedará claro de cuál de los dos ángulos se está hablando.

Cualquier ángulo es congruente con algún ángulo ubicado en el plano xy , cuyo vértice está en el origen y tiene un lado, denominado **lado inicial**, coincidiendo con la dirección positiva del eje x ; el otro lado del ángulo se llama **lado terminal**. De este último ángulo se dice que está en **posición estándar**.

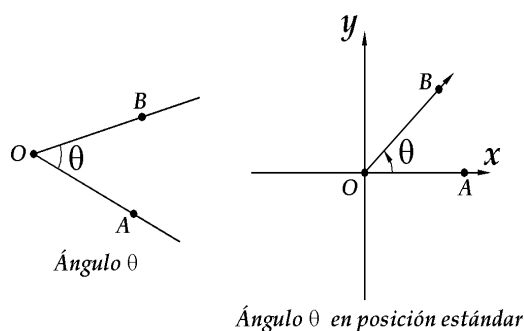


Figura 16.1

En el ángulo $\angle AOB$ de la figura, el lado OA es el lado inicial y el lado OB es el lado terminal. El ángulo $\angle AOB$ puede generarse al rotar el lado OA alrededor de O hasta el lado OB .

Decimos que un ángulo en posición estándar es **positivo** si la rotación del lado inicial se hace en sentido contrario a las manecillas del reloj, en caso contrario es **negativo**.

Medida de ángulos

Los ángulos se miden en grados o en radianes. Si dividimos una circunferencia en 360 partes iguales, y trazamos los rayos desde cada división al centro, se forman 360 ángulos congruentes. Decimos que cada uno de esos ángulos mide 1 grado, denotado 1° .

1° es la medida del ángulo equivalente a $\frac{1}{360}$ de una vuelta completa. De esta forma $360^\circ = 1$ vuelta completa.

Si se divide la longitud L de una circunferencia por su diámetro, el resultado es la constante π , es decir,

$$\frac{L}{d} = \frac{L}{2r} = \pi,$$

por ello $L = 2\pi r$.

Un **radián**, denotado 1 rad, es la medida del ángulo formado por dos rayos que se interceptan en el centro de una circunferencia de radio r , de tal forma que el arco sobre la circunferencia que se encuentra entre los dos rayos tiene longitud r .

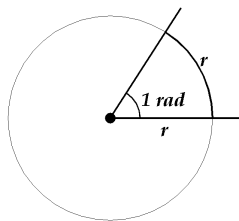


Figura 16.2

Podemos expresar la medida de un ángulo en radianes o en grados. Como un ángulo de 2π rad equivale a un ángulo de 360° encontramos que un ángulo de 1 rad mide $\frac{180}{\pi}^\circ$ y un ángulo de 1° mide $\frac{\pi}{180}$ rad.

Ejemplo 16.1

1. Encuentre la medida en radianes de un ángulo que mide 36° .

Un ángulo de 36° mide $\frac{36\pi}{180}$ rad, es decir, $\frac{\pi}{5}$ rad.

2. ¿Cuál es la medida en grados de un ángulo que mide 3π rad?

$$3\pi \text{ rad} = 3\pi \frac{180^\circ}{\pi} = 540^\circ.$$

Nota: Cuando expresemos la medida de un ángulo en radianes omitiremos en general la abreviatura rad.

Ángulos coterminales

Dos ángulos en posición estándar son **coterminales** si sus lados terminales coinciden. En la figura 16.3 (izquierda) θ y δ son ángulos coterminales y, α y β lo son en la figura 16.3 (derecha).

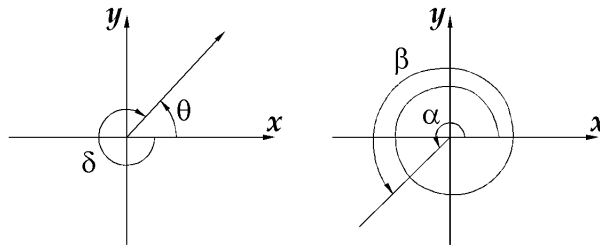


Figura 16.3

Si θ es un ángulo en posición estándar, θ y $\theta + 360^\circ n$, con $n \in \mathbb{Z}$, son ángulos coterminales.

Ejemplo 16.2

- Encuentre ángulos coterminales con el ángulo $\theta = 45^\circ$, ubicado en posición estándar.
- Encuentre ángulos coterminales con el ángulo $\theta = -\frac{\pi}{6}$ en posición estándar.

Solución

- Para hallar ángulos coterminales con θ , sumamos múltiplos positivos o negativos de 360° , así:

$$45^\circ + 360^\circ = 405^\circ, \quad 45^\circ + 720^\circ = 765^\circ, \quad 45^\circ - 360^\circ = -315^\circ, \dots,$$

son ángulos coterminales con $\theta = 45^\circ$. Gráficamente, tenemos:

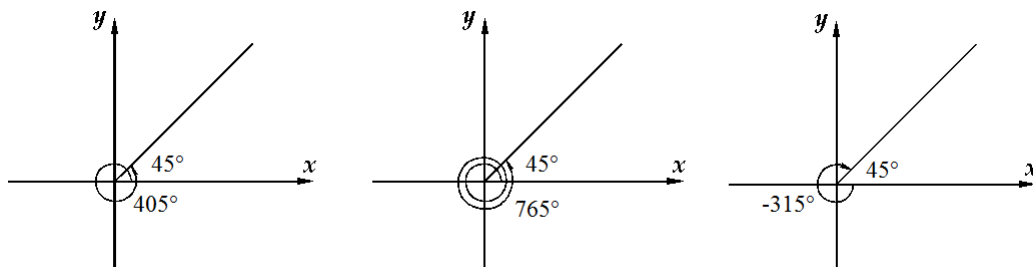


Figura 16.4

- De manera análoga para hallar ángulos coterminales con $\theta = -\frac{\pi}{6}$, sumamos múltiplos positivos y negativos de 2π de tal forma que,

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{6} + 2\pi &= \frac{11\pi}{6}, & -\frac{\pi}{6} + 8\pi &= \frac{47\pi}{6}, \\ -\frac{\pi}{6} - 4\pi &= \frac{-25\pi}{6}, \end{aligned}$$

son ángulos coterminales con $-\frac{\pi}{6}$.

Ejemplo 16.3

Encuentre un ángulo θ tal que $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, que sea coterminal con el ángulo de medida 1125° .

Solución

Para hallar el ángulo θ restamos 360° de 1125° tantas veces como sea necesario o, equivalentemente, dividimos 1125° entre 360° y el residuo será el ángulo buscado.

Así

$$\frac{1125}{360} = 3 + \frac{45}{360}.$$

Luego, $\theta = 45^\circ$.

Ángulo de referencia

El **ángulo de referencia** $\bar{\theta}$ de un ángulo θ en posición estándar, es el ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el eje x .

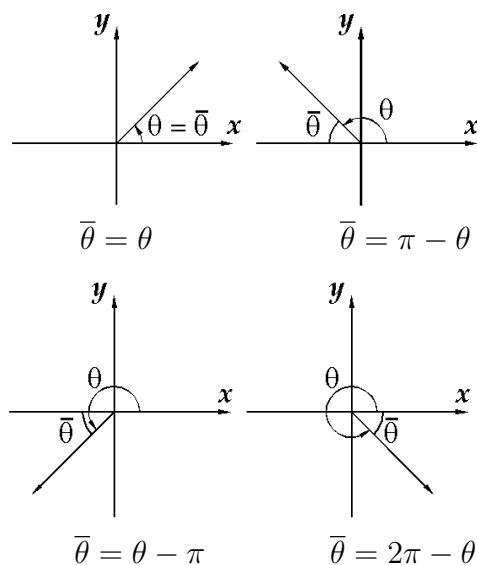


Figura 16.5

Ejemplo 16.4

Encuentre el ángulo de referencia de los siguientes ángulos:

i) 780°

ii) $-\frac{5\pi}{6}$.

Solución

- i) Los ángulos 780° y 60° son coterminales ya que $780^\circ - 2(360^\circ) = 60^\circ$. Luego, $\bar{\theta} = 60^\circ$ porque el lado terminal de 780° está en el cuadrante I.

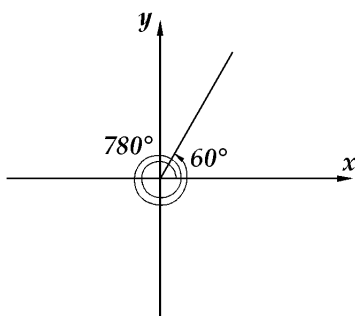


Figura 16.6

- ii) El ángulo de referencia es el ángulo agudo formado por el lado terminal de $-\frac{5\pi}{6}$ y el eje x . Así, $\bar{\theta} = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$.

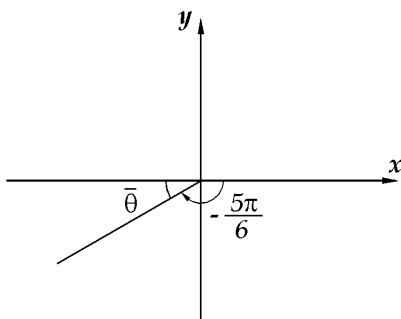


Figura 16.7

Ejercicios

- Encuentre la medida en radianes del ángulo dado en grados.
(a) 54° . (b) -75° . (c) 202.5° .
- Encuentre la medida en grados del ángulo dado en radianes.
(a) $\frac{7\pi}{6}$. (b) $-\frac{3\pi}{2}$. (c) $-\frac{13\pi}{12}$.
- Determine si la pareja de ángulos dados son coterminales.
(a) 70° y 430° . (b) 155° y 875° . (c) $\frac{5\pi}{6}$ y $\frac{17\pi}{6}$.
- Encuentre el ángulo entre 0° y 360° que es conterminal con el ángulo dado.
(a) -546° . (b) 1345° .
- Encuentre el ángulo entre 0 y 2π que es coterminal con el ángulo dado.
(a) 331π . (b) $-\frac{38\pi}{4}$.

Funciones trigonométricas, aplicaciones a triángulos rectángulos

Funciones trigonométricas de ángulos

Definición:

Sea θ un ángulo en posición estándar y sea $P = (x, y) \neq (0, 0)$ un punto sobre el lado terminal de θ . Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del origen al punto P , definimos las funciones trigonométricas de θ así:

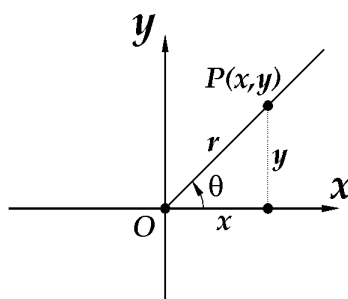


Figura 17.1

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{y}{r}, & \cos \theta &= \frac{x}{r}, \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \text{ (si } x \neq 0), & \cot \theta &= \frac{x}{y} \text{ (si } y \neq 0), \\ \sec \theta &= \frac{r}{x} \text{ (si } x \neq 0), & \csc \theta &= \frac{r}{y} \text{ (si } y \neq 0).\end{aligned}$$

Es importante anotar que las funciones trigonométricas de un ángulo **no** dependen de la elección del punto $P = (x, y)$. Si $P' = (x', y') \neq (0, 0)$ es cualquier otro punto sobre el lado terminal del ángulo, las funciones trigonométricas obtenidas son las mismas.

Observación

Sea θ un ángulo agudo en posición estándar y sea $P = (x, y) \neq (0, 0)$ un punto sobre el lado terminal de θ .

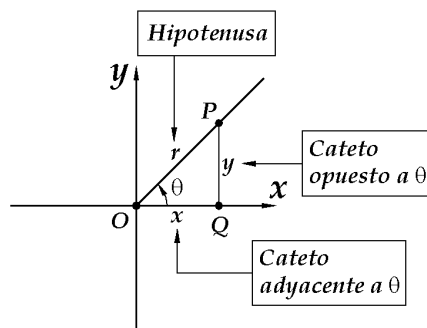


Figura 17.2

El $\triangle OQP$ es rectángulo en Q , la hipotenusa es el segmento $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$ y los catetos son los segmentos $\overline{OQ}$, llamado cateto adyacente a θ , y $\overline{QP}$, llamado cateto opuesto a θ , de longitudes x e y , respectivamente.

Con base en este triángulo y en la definición de las funciones trigonométricas de ángulos tenemos:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, & \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{\text{cateto adyac.}}{\text{hipotenusa}}, \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyac.}}, & \cot \theta &= \frac{x}{y} = \frac{\text{cateto adyac.}}{\text{cateto opuesto}}, \\ \sec \theta &= \frac{r}{x} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyac.}}, & \csc \theta &= \frac{r}{y} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}. \end{aligned}$$

Y de esta forma podemos calcular las funciones trigonométricas de cualquier ángulo agudo de un triángulo rectángulo.

Hallemos las funciones trigonométricas de los ángulos $\theta = 45^\circ$ ó $\frac{\pi}{4}$; $\theta = 60^\circ$ ó $\frac{\pi}{3}$ y $\theta = 30^\circ$ ó $\frac{\pi}{6}$.

Para $\theta = 45^\circ$ ó $\frac{\pi}{4}$:

Dibujamos un cuadrado de lado 1 y trazamos una diagonal cuya longitud, usando el Teorema de Pitágoras, es $\sqrt{2}$. Los ángulos agudos de cada uno de los triángulos que se forman son de 45° .

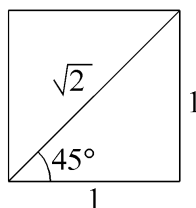


Figura 17.3

Entonces, las funciones trigonométricas de $\theta = 45^\circ$ ó $\frac{\pi}{4}$ son:

$$\operatorname{sen}(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(45^\circ),$$

$$\tan(45^\circ) = 1 = \cot(45^\circ),$$

$$\sec(45^\circ) = \sqrt{2} = \csc(45^\circ).$$

Para $\theta = 60^\circ$ ó $\frac{\pi}{3}$:

Dibujamos un triángulo equilátero $\triangle OPQ$ de lado 2 y trazamos la altura relativa a uno de sus lados. Como la altura es también mediana, la longitud de $\overline{PR}$ es 1 y usando el Teorema de Pitágoras encontramos que la longitud de la altura es $\sqrt{3}$.

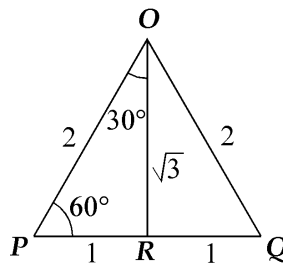


Figura 17.4

Como cada uno de los ángulos interiores del triángulo mide 60° (¿por qué?), con base en la información anterior, calculamos las funciones trigonométricas de $\theta = 60^\circ$ ó $\frac{\pi}{3}$:

$$\operatorname{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}, \quad \tan(60^\circ) = \sqrt{3},$$

$$\cot(60^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \sec(60^\circ) = 2, \quad \csc(60^\circ) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Usando el mismo triángulo y el hecho de que la altura es también bisectriz, calculamos las funciones trigonométricas de $\theta = 30^\circ$ ó $\frac{\pi}{6}$:

$$\operatorname{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}, \quad \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cot(30^\circ) = \sqrt{3}, \quad \sec(30^\circ) = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \csc(30^\circ) = 2.$$

Estos resultados se usan con mucha frecuencia y se encuentran fácilmente si se trabaja con los triángulos aquí descritos.

Las funciones trigonométricas de ángulos mayores de 90° , se hallan con base en las de los ángulos agudos que son sus ángulos de referencia.

Puede probarse que los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo θ en posición estándar son las mismas que las de su ángulo de referencia $\bar{\theta}$ salvo por el signo.

Para hallar los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo θ , se procede así:

1. Se encuentra su ángulo de referencia $\bar{\theta}$.
2. Se determina el signo de cada una de las funciones trigonométricas de θ , teniendo en cuenta el cuadrante en el cual se ubica θ .
3. Se halla el valor de las funciones trigonométricas de $\bar{\theta}$, que es el mismo para θ , excepto por el signo.

Ejemplo 17.1

Encuentre los siguientes valores:

- i) $\csc \frac{5\pi}{4}$
- ii) $\cot \left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Solución

- i) Si $\theta = \frac{5\pi}{4}$, entonces $\bar{\theta} = \frac{\pi}{4}$. Además, en el cuadrante III, $\csc \theta$ es negativa. Luego,

$$\csc \frac{5\pi}{4} = -\csc \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}.$$

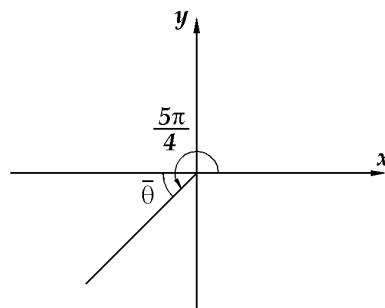


Figura 17.5

- ii) En este caso, $\bar{\theta} = \frac{\pi}{4}$ y, en el cuadrante IV, $\cot \theta$ es negativa. Luego,

$$\cot \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cot \frac{\pi}{4} = -1.$$

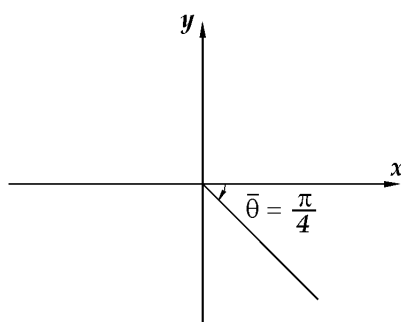


Figura 17.6

Aplicaciones a triángulos rectángulos

Un triángulo tiene seis elementos: tres ángulos y tres lados. **Resolver un triángulo** significa hallar la medida de todos sus elementos a partir de la información que se tenga acerca del triángulo.

En muchas aplicaciones como navegación, levantamiento de planos, astronomía, se deben resolver triángulos.

Veremos, primero, algo de terminología y, luego, algunos ejemplos.

Si un observador está mirando un objeto, entonces, la línea del ojo del observador al objeto se llama **línea de visión**. Si el objeto que está siendo observado está arriba de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se llama **ángulo de elevación**. Si el objeto está abajo de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se llama **ángulo de depresión**.

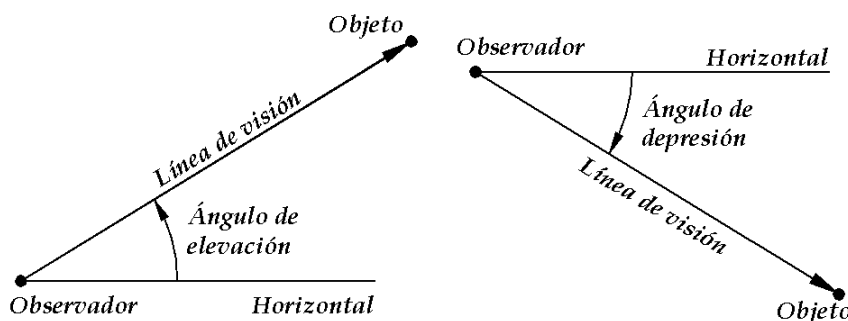


Figura 17.7

Ejemplo 17.2 (*Altura de un edificio*)

Se encuentra que el ángulo de elevación hasta la parte superior del Edificio Coltejer en Medellín es 11° , desde el suelo a una distancia de 900 metros a partir de la base del edificio. Use esta información para hallar la altura del edificio.

Solución

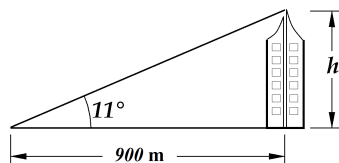


Figura 17.8

Sea h la altura del edificio. De la figura 17.8 se observa que $\tan(11^\circ) = \frac{h}{900}$. Es decir, $h = 900 \tan(11^\circ) \approx 175$. Luego, la altura del edificio es aproximadamente 175 metros.

Ejemplo 17.3 (*Altura de una cubierta de nubes*)

Para medir la altura de una cubierta de nubes en un aeropuerto, un trabajador dirige un reflector hacia arriba a un ángulo de 75° desde la horizontal. Un observador a 600 m mide el ángulo de elevación hasta el punto de luz y encuentra que es de 45° . Determine la altura h de la cubierta de nubes.

Solución

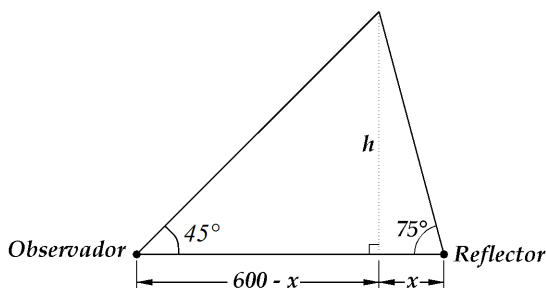


Figura 17.9

Para hallar h , sea x la distancia desde el reflector hasta el punto P donde la línea de h corta el suelo (ver figura 17.9). Observemos que, por un lado,

$$h = (600 - x) \tan 45^\circ = 600 - x \quad (17.1)$$

$$x + h = 600.$$

Del otro triángulo, $h = x \tan 75^\circ$. Es decir,

$$h = 3.7x, \quad 3.7x - h = 0. \quad (17.2)$$

De (17.1): $x = 600 - h$ y, reemplazando en (17.2), tenemos que $3.7(600 - h) - h = 0$. Por tanto $h = \frac{(3.7)(600)}{4.7} \approx 472.34$. Luego, la altura de la cubierta de nubes es aproximadamente 472.34 m.

Ejercicios

1. Para cada uno de los siguientes casos, encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas de θ .

(a) $\sin \theta = \frac{3}{5}$, θ pertenece al I cuadrante.

(b) $\cos \theta = -\frac{2}{3}$, θ pertenece al II cuadrante.

(c) $\tan \theta = -2$, θ pertenece al II cuadrante.

(d) $\cot \theta = -2$, θ pertenece al II cuadrante.

(e) $\sec \theta = \frac{4}{3}$, θ pertenece al IV cuadrante.

(f) $\csc \theta = -3$, θ pertenece al III cuadrante.

2. Sean α , β ángulos agudos tales que $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ y $\tan \beta = \frac{1}{3}$. Encontrar el valor de

$$(\sec \alpha) (\cos \beta)^2 (\sin \beta)^2 (\csc \alpha)^2.$$

3. Un árbol de 96 pies proyecta una sombra de 120 pies de largo. ¿Cuál es el ángulo de elevación del sol?
4. Un muro de una casa tiene 2.10 metros de alto. Para alcanzarlos es necesario utilizar una escalera que forme un ángulo de 45° con la horizontal. ¿Cuál debe ser la longitud de la escalera?
5. Desde un punto de observación en un edificio frente al oceano, los ángulos de depresión de 2 botes alineados son 45° y 60° . Encontrar la distancia entre los botes si el punto de observación esta a una altura de 60 metros.

Leyes de seno y coseno

Para resolver algunos problemas de aplicación hallamos uno o más elementos de un **triángulo rectángulo**, y para ello usamos la definición de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo y el **Teorema de Pitágoras**, que **sólo es válido para triángulos rectángulos**.

Se presentan además problemas en los cuales se deben hallar uno o más elementos de un **triángulo acutángulo** u **obtusángulo**, en los que no se puede usar de manera directa el Teorema de Pitágoras ni la definición de las funciones trigonométricas.

Vamos a estudiar dos nuevas herramientas, llamadas Ley de seno y Ley de coseno, que expresan ciertas relaciones entre las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo cualquiera.

Ley de seno

En cualquier triángulo ABC

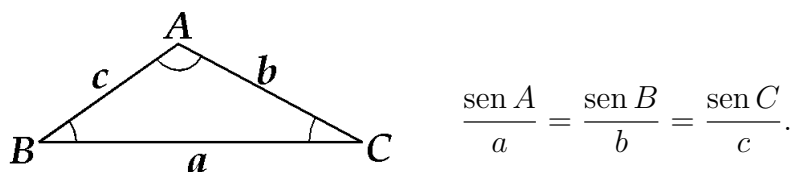


Figura 18.1

Es decir, en todo triángulo, la razón entre el seno de un ángulo y la medida del lado opuesto es constante.

Observaciones

Si en un triángulo conocemos un lado y dos ángulos o dos lados y el ángulo opuesto a uno de esos lados, podemos usar la ley de seno para resolver el triángulo.

Ejemplo 18.1

El campanario de la Torre de Pisa en Italia, forma un ángulo de 5.6° con la recta vertical trazada desde la base C de la torre situada en el piso. Una turista se ubica a 105 m de la

base C de la torre, en la dirección en la que la torre forma un ángulo agudo con la horizontal. El ángulo de elevación medido por la turista es de 29.2° hasta la parte superior de la torre. Encuentre la longitud de la torre.

Solución

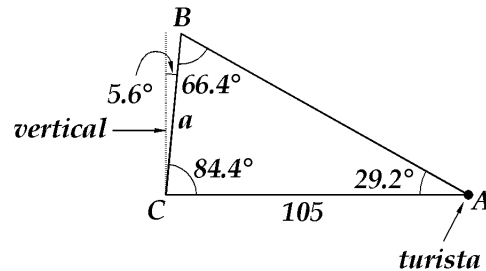


Figura 18.2

Sea a la longitud, en metros, de la Torre. En el triángulo ABC :

$C = 90^\circ - 5.6^\circ = 84.4^\circ$, porque 5.6° es el ángulo formado por la torre con la vertical.

$B = 180^\circ - 29.2^\circ - 84.4^\circ = 66.4^\circ$.

Usando la ley de seno tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\text{sen } A}{a} &= \frac{\text{sen } B}{105}, \\ a &= \frac{105 \text{ sen } A}{\text{sen } B}, \\ a &= \frac{105 \text{ sen } (29.2^\circ)}{\text{sen } (66.4^\circ)} = 55.9 \text{ m.}\end{aligned}$$

Luego, la longitud de la torre es aproximadamente 56 m.

Ejemplo 18.2

Resuelva el triángulo $\triangle ABC$ si $A = 45^\circ$, $a = 7\sqrt{2}$ y $b = 7$.

Solución

Primero, dibujamos un triángulo con la información suministrada. El dibujo es tentativo ya que, aún, no se conocen los otros ángulos.

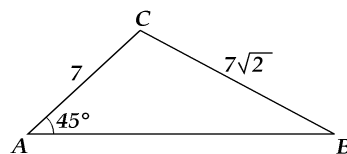


Figura 18.3

Encontremos el ángulo B usando la ley de seno:

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b}.$$

Luego

$$\text{sen } B = \frac{b \text{sen } A}{a} = \frac{7 \text{sen } 45^\circ}{7\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Hay dos posibles ángulos B entre 0° y 180° tales que $\text{sen } B = \frac{1}{2}$: $B = 30^\circ$ y $B = 150^\circ$, pero $B = 150^\circ$ no es solución ya que $150^\circ + 45^\circ > 180^\circ$.

Luego, $B = 30^\circ$ y, así, $C = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$.

Aplicando nuevamente ley de seno, podemos hallar la longitud del lado c :

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}$$

donde

$$c = \frac{b \text{sen } C}{\text{sen } B} = \frac{7 \text{sen } (105^\circ)}{\text{sen } (30^\circ)} \approx 13.5.$$

Ejemplo 18.3

Resuelva el triángulo $\triangle ABC$, si $A = 42^\circ$, $a = 70$ y $b = 122$.

Solución

Como en el ejemplo anterior, hacemos un bosquejo con la información dada.

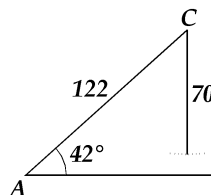


Figura 18.4

Calculemos el ángulo B usando ley de seno:

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b},$$

luego

$$\text{sen } B = \frac{b \text{sen } A}{a} = \frac{122 \text{sen } (42^\circ)}{70} \approx 1.17.$$

Como $\text{sen } \alpha \leq 1$ para todo ángulo α , ya que es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa en un triángulo rectángulo y la longitud de la hipotenusa siempre es mayor que la de cualquiera de los catetos, entonces ningún triángulo satisface las condiciones del problema.

Ejemplo 18.4

Resuelva el triángulo $\triangle ABC$ si $A = 43.1^\circ$, $a = 186.2$ y $b = 248.6$.

Solución

Tracemos un bosquejo del triángulo con los datos del problema:

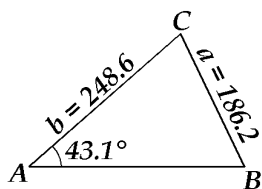


Figura 18.5

Usemos ley de seno para calcular el ángulo B :

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} .$$

$$\text{Entonces, } \text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{248.6 \text{ sen } (43.1^\circ)}{186.2} \approx 0.9192.$$

Existen dos ángulos que cumplen esta condición,

$$B \approx 65.82^\circ \text{ y } B' = 180^\circ - 65.82^\circ \approx 114.18^\circ.$$

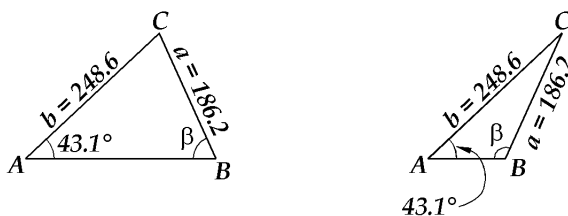


Figura 18.6

Luego los dos triángulos son solución del problema.

Observación

Para resolver el triángulo cuando se conocen dos lados y el ángulo entre ellos, o los tres lados, no podemos usar de manera directa la ley de seno. En estos casos, se aplica la ley de coseno que veremos a continuación.

Ley de coseno

En cualquier triángulo $\triangle ABC$

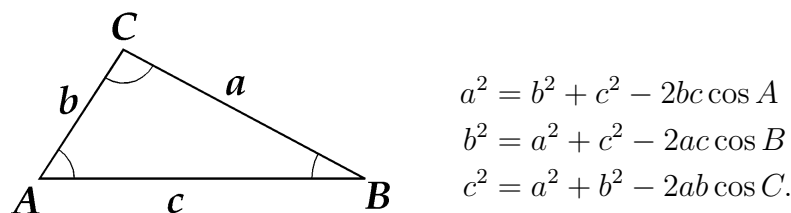


Figura 18.7

Es decir, en cualquier triángulo, el cuadrado de la longitud de cualquiera de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble producto de la longitud de estos dos lados y del coseno del ángulo entre ellos.

Observación

Si alguno de los ángulos del triángulo es recto, por ejemplo $A = 90^\circ$, entonces $\cos A = 0$ y la ley de coseno es equivalente al Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$.

Ejemplo 18.5

Un automóvil viaja por una carretera en dirección Este durante 1 hora, luego viaja durante 30 minutos por otra carretera que se dirige al Noreste. Si el automóvil se desplaza a una velocidad constante de 40 millas/hora, ¿qué tan lejos está de su posición de partida al terminar el recorrido?

Solución

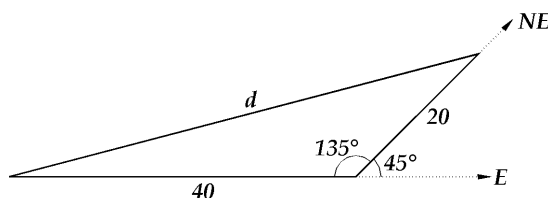


Figura 18.8

Sea d la distancia, en millas, que separa al automóvil del punto de partida. Como:

distancia recorrida hacia el Este = 40 millas/hora $\times$ 1 hora = 40 millas,

distancia recorrida hacia el Noreste = 40 millas/hora $\times \frac{1}{2}$ hora = 20 millas,

entonces, aplicando ley de coseno

$$d^2 = 20^2 + 40^2 - 2(20)(40) \cos(135^\circ),$$

$$d^2 = 2000 - 1600 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx 3131.37,$$

$$d \approx \sqrt{3131.37} \approx 55.96.$$

Luego, al cabo de hora y media el automóvil está, aproximadamente, a 55.96 millas de su punto de partida.

Ejemplo 18.6

Los lados de un triángulo son $a = 20$, $b = 25$, $c = 22$. Encuentre los ángulos del triángulo.

Solución

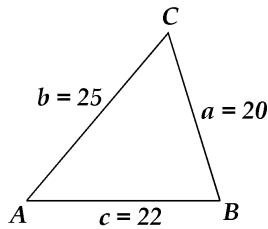


Figura 18.9

Aplicando ley de coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Entonces,

$$\cos A = \frac{(20)^2 - (25)^2 - (22)^2}{-2(25)(22)} \approx 0.644.$$

Luego, $A = 49.87^\circ$.

Similarmente

$$\cos B = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} = \frac{(25)^2 - (20)^2 - (22)^2}{-2(20)(22)} \approx 0.294.$$

Luego, $B \approx 72.88^\circ$ y

$$\cos C = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} = \frac{(22)^2 - (20)^2 - (25)^2}{-2(20)(25)} \approx 0.541,$$

así, $C \approx 57.25^\circ$.

Ejercicios

1. Resolver cada uno de los siguientes triángulos (si existe solución):

(a) $a = 525$, $c = 421$ y $\alpha = 130^\circ$.

(b) $a = 31.5$, $b = 51.8$ y $\alpha = 34^\circ$.

- (c) $c = 25$, $\alpha = 35^\circ$ y $\beta = 68^\circ$.
 (d) $a = 24.5$, $b = 18.6$ y $\gamma = 26.4^\circ$.
 (e) $b = 215$, $c = 150$ y $\beta = 43^\circ$.
 (f) $b = 30$, $c = 20$ y $\beta = 140^\circ$.

Donde α es el ángulo opuesto al lado a , β es el ángulo opuesto al lado b y γ es el ángulo opuesto al lado c .

2. Una antena de radio de onda corta está apoyada por dos cables cuyas longitudes son 165 y 185 pies. Cada alambre está fijo a la parte superior de la antena y anclado al suelo, en dos puntos de anclaje en lados opuestos de la antena. El cable más corto forma un ángulo de 67° con el suelo. ¿Qué tan apartados están los puntos de anclaje?
3. La caja rectangular de la figura 18.10 tiene dimensiones de $11\text{cm} \times 7\text{cm} \times 4\text{cm}$. Calcular el ángulo α formado por una diagonal de la base y una diagonal del lado de $7\text{cm} \times 4\text{cm}$.

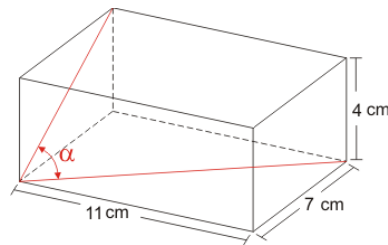


Figura 18.10

4. Un piloto vuela en una trayectoria recta durante 1 hora y 30 minutos. Después hace una corrección del curso, en dirección 10° a la derecha de su curso original y vuela 2 horas en la nueva dirección. Si mantiene una velocidad constante de 625 metros/h , ¿qué tan lejos está de su punto de partida?
5. Para encontrar la anchura de un río, se localiza un punto A en uno de los lados y dos puntos B y C en el otro lado (ver figura 18.11), un cuarto punto D, está sobre la línea que pasa por A y B y un quinto punto E, está sobre la línea que pasa por A y C. Calcular la anchura del río si: $BC = 506$ pies, $BD = 453$ pies, $BE = 809$ pies, $CD = 753$ pies, $CE = 393$ pies.

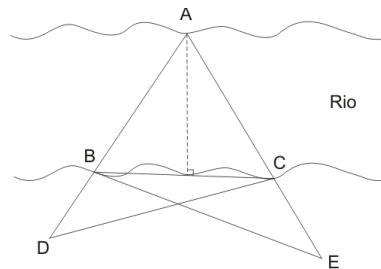


Figura 18.11

Identidades trigonométricas

Una **identidad** es una igualdad entre dos expresiones que es cierta para todos los valores de las variables para los cuales están definidas las expresiones involucradas en ella.

Ejemplo 19.1

La ecuación $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ es una identidad porque es válida para todo $x \in \mathbb{R}$.

La ecuación $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$ es una identidad para $x \neq \pm 1$, porque para esos valores están definidas las expresiones de los dos miembros de la igualdad, y además dichas expresiones coinciden.

La ecuación $x^2 - 1 = 0$ no es una identidad, porque sólo es válida para $x = 1$ ó $x = -1$.

Si una identidad contiene expresiones trigonométricas, se denomina **identidad trigonométrica**.

Veremos inicialmente unas identidades trigonométricas básicas, llamadas **identidades trigonométricas fundamentales**, que nos permiten expresar una función trigonométrica en términos de las otras, simplificar expresiones trigonométricas y resolver ecuaciones trigonométricas.

Identidades trigonométricas fundamentales

- **Identidades recíprocas.** Se deducen directamente de la definición de las funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} t &= \frac{1}{\operatorname{csc} t} , & \operatorname{csc} t &= \frac{1}{\operatorname{sen} t} , \\ \cos t &= \frac{1}{\operatorname{sec} t} , & \operatorname{sec} t &= \frac{1}{\cos t} , \\ \tan t &= \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} , & \cot t &= \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} , \\ \tan t &= \frac{1}{\cot t} , & \cot t &= \frac{1}{\tan t} . \end{aligned}$$

- **Identidades Pitagóricas**

$$\begin{aligned}\sin^2 t + \cos^2 t &= 1 \quad , \\ 1 + \tan^2 t &= \sec^2 t \quad , \\ 1 + \cot^2 t &= \csc^2 t \quad .\end{aligned}$$

Demostración de identidades trigonométricas

Además de las identidades trigonométricas fundamentales, hay otras identidades importantes que se usan en otros cursos de matemáticas y de física.

Dada una ecuación es fácil probar que no es una identidad, hallando al menos un valor de la variable (o variables) para el cual no se satisfaga la ecuación.

Ejemplo 19.2

Demuestre que la ecuación $\sin x + \cos x = 1$ no es una identidad trigonométrica.

Solución

Para demostrar que, $\sin x + \cos x = 1$ no es una identidad, basta encontrar un valor de x para el cual no se cumpla la ecuación.

Consideremos $x = \frac{\pi}{4}$: $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Luego,

$$\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 1.$$

Como $\sin x$ y $\cos x$ están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ y $x = \frac{\pi}{4}$ no satisface la ecuación, entonces $\sin x + \cos x = 1$ no es una identidad.

¿Cómo probar que una Ecuación es una Identidad?

Para probar que una ecuación es una identidad trigonométrica, debemos elegir un lado de la ecuación y transformarlo, usando identidades conocidas y operaciones algebraicas, hasta obtener el otro lado de la ecuación.

Algunas sugerencias para realizar este trabajo son:

- Escoger el lado “más complicado” de la ecuación para transformarlo.
- Realizar operaciones algebraicas como sumar o restar fracciones, o expresar una fracción como una suma de fracciones, o factorizar numerador o denominador de una fracción, entre otras.
- Tener en cuenta la expresión del lado de la ecuación al cual se quiere llegar ya que ésta le puede sugerir el paso siguiente.

- En algunos casos, es útil expresar el lado de la ecuación a transformar en términos de seno y coseno, usando las identidades fundamentales.

Otro método para probar que una ecuación es una identidad, es transformar ambos lados por separado hasta obtener en cada lado la misma expresión. En este caso no necesariamente realizamos las mismas operaciones en ambos lados, sino que trabajamos independientemente en cada lado hasta obtener el mismo resultado en ambos lados.

Ejemplo 19.3

Pruebe las siguientes identidades trigonométricas:

1. $\frac{1 + \sec^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1 + \cos^2 x$
2. $2 \tan x \sec x = \frac{1}{1 - \sin x} - \frac{1}{1 + \sin x}$
3. $\frac{1 + \cos x}{\cos x} = \frac{\tan^2 x}{\sec x - 1}.$

Solución

1. Transformemos el lado izquierdo de la ecuación:

$$\frac{1 + \sec^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 + \sec^2 x}{\sec^2 x} = \frac{1}{\sec^2 x} + \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x} = \cos^2 x + 1.$$

Luego, $\frac{1 + \sec^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1 + \cos^2 x$ es una identidad trigonométrica.

2. Escojamos el lado derecho:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \sin x} - \frac{1}{1 + \sin x} &= \frac{1 + \sin x - (1 - \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} \\ &= \frac{2 \sin x}{1 - \sin^2 x} \\ &= \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} \\ &= 2 \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} \\ &= 2 \tan x \sec x. \end{aligned}$$

Luego, la ecuación dada es una identidad trigonométrica.

3. Trabajemos con ambos lados separadamente:

Lado izquierdo:

$$\frac{1 + \cos x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} = \sec x + 1.$$

Lado derecho:

$$\frac{\tan^2 x}{\sec x - 1} = \frac{\sec^2 x - 1}{\sec x - 1} = \frac{(\sec x + 1)(\sec x - 1)}{\sec x - 1} = \sec x + 1.$$

Como al transformar cada lado de la ecuación se obtiene la misma expresión, la ecuación dada es una identidad.

Otras identidades trigonométricas importantes

Existen otras identidades trigonométricas importantes que involucran más de un ángulo o múltiplos de un ángulo.

Fórmulas de adición y sustracción

$$1. \quad \sin(s + t) = \sin s \cos t + \cos s \sin t \quad ,$$

$$\cos(s + t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t \quad ,$$

$$\tan(s + t) = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t} \quad .$$

$$2. \quad \sin(s - t) = \sin s \cos t - \cos s \sin t \quad ,$$

$$\cos(s - t) = \cos s \cos t + \sin s \sin t \quad ,$$

$$\tan(s - t) = \frac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t} \quad .$$

Ejemplo 19.4

Calcule el valor exacto de las siguientes expresiones, sin emplear calculadora:

$$a. \quad \cos(20^\circ) \cos(70^\circ) - \sin(20^\circ) \sin(70^\circ) \quad .$$

$$b. \quad \tan \frac{7\pi}{12} \quad .$$

Solución

$$a. \quad \cos(20^\circ) \cos(70^\circ) - \sin(20^\circ) \sin(70^\circ) = \cos(20^\circ + 70^\circ) = \cos(90^\circ) = 0 \quad .$$

$$b. \quad \text{Escribimos } \frac{7\pi}{12} \text{ como una suma de ángulos, es decir}$$

$$\begin{aligned} \tan \frac{7\pi}{12} &= \tan \left(\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} \right) \\ &= \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - 1 \cdot \sqrt{3}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \quad . \end{aligned}$$

Ejemplo 19.5

Demuestre las siguientes identidades trigonométricas:

1. $\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc x$.
2. $1 - \tan x \tan y = \frac{\cos(x+y)}{\cos x \cos y}$.

Solución

1. Transformemos el izquierdo:

$$\begin{aligned}\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \\ &= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x} \\ &= \frac{1}{0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x} \\ &= \frac{1}{\sin x} = \csc x.\end{aligned}$$

2. Transformemos el lado derecho:

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x+y)}{\cos x \cos y} &= \frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\cos x \cos y} \\ &= \frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} \\ &= 1 - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} \\ &= 1 - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y} \\ &= 1 - \tan x \tan y.\end{aligned}$$

Fórmulas para el ángulo doble

A partir de las fórmulas de adición y sustracción, es fácil probar las siguientes fórmulas para el ángulo doble:

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x, \\ \tan 2x &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.\end{aligned}$$

Ejemplo 19.6

Pruebe las siguientes identidades:

1. $\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.
2. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

Solución

1. $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$,
 $\cos 2x = 1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x$,
 $\cos 2x = 1 - 2 \text{sen}^2 x$,
 $2 \text{sen}^2 x = 1 - \cos 2x$,
 $\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.
2. $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$,
 $\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$,
 $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$,
 $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

Ejercicios

1. Verifique la identidad.
 - (a) $\csc x [\csc x + \text{sen}(-x)] = \cot^2 x$.
 - (b) $\frac{1 - \text{sen} x}{1 + \text{sen} x} = (\sec x - \tan x)^2$.
 - (c) $\frac{1 + \text{sen} x}{1 - \text{sen} x} - \frac{1 - \text{sen} x}{1 + \text{sen} x} = 4 \tan x \sec x$.
 - (d) $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$.
 - (e) $4(\text{sen}^6 x + \cos^6 x) = 4 - 3 \text{sen}^2(2x)$.
 - (f) $1 - \tan x \tan y = \frac{\cos(x + y)}{\cos x \cos y}$.
 - (g) $\frac{\text{sen}(3x) + \text{sen}(7x)}{\cos(3x) - \cos(7x)} = \cot(2x)$.
2. Calcule el valor exacto de las siguientes expresiones sin usar calculadora.
 - (a) $\frac{\tan \frac{\pi}{18} + \tan \frac{\pi}{9}}{1 - \tan \frac{\pi}{18} \tan \frac{\pi}{9}}$.

(b) $\sin 75^\circ$.

(c) $\sin \frac{11\pi}{12}$.

3. Escriba la función $5(\sin 2x - \cos 2x)$ sólo en términos de coseno.

4. Determine $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ y $\tan 2\theta$ a partir de la información proporcionada.

(a) $\csc \theta = 4$, $\tan \theta < 0$.

(b) $\cot \theta = \frac{2}{3}$, $\sin \theta > 0$.

5. Calcule $\sin \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2}$ y $\tan \frac{\theta}{2}$ a partir de la información proporcionada.

(a) $\tan \theta = 1$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

(b) $\cot \theta = 5$, $180^\circ < \theta < 270^\circ$.

Ecuaciones trigonométricas

Definición

Una **ecuación trigonométrica** es una ecuación en términos de expresiones trigonométricas, para la cual las variables o incógnitas representan números reales, que son las medidas en radianes de ángulos.

Una identidad es una ecuación trigonométrica que tiene como solución todos los valores de la variable para los cuales están definidas las expresiones trigonométricas involucradas.

Resolver una ecuación trigonométrica es hallar el ángulo, o los ángulos que satisfacen la ecuación, es decir, los ángulos que convierten la ecuación en una proposición verdadera.

Para resolver una ecuación trigonométrica usamos las operaciones algebraicas y las identidades trigonométricas para escribir, en términos de una función trigonométrica, y a un lado del signo igual, todas las expresiones trigonométricas, y luego encontramos los ángulos que satisfacen la ecuación.

Ejemplo 20.1

Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\csc^2 x - 4 = 0.$$

Solución

$$\begin{aligned} (\csc x - 2)(\csc x + 2) &= 0, \\ \csc x - 2 &= 0 \quad \text{ó} \quad \csc x + 2 = 0, \\ \csc x &= 2 \quad \text{ó} \quad \csc x = -2, \\ \frac{1}{\sen x} &= 2 \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\sen x} = -2, \\ \sen x &= \frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad \sen x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Hallemos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$, es decir, los ángulos en dicho intervalo que satisfacen estas ecuaciones:

- $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ si $x = \frac{\pi}{6}$ ó $x = \frac{5\pi}{6}$,
- $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$ si $x = \frac{7\pi}{6}$ ó $x = \frac{11\pi}{6}$.

Luego, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{7\pi}{6}$ y $x = \frac{11\pi}{6}$ son las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi]$ (ver figura 20.1).

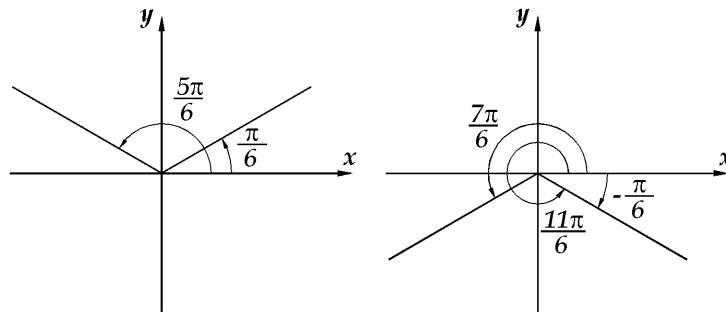


Figura 20.1

Como la función seno es periódica, de período 2π , todas las soluciones en $\mathbb{R}$ se obtienen sumando los múltiplos enteros de 2π a las soluciones halladas en el intervalo $[0, 2\pi]$. Así,

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{y} \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,$$

con $k \in \mathbb{Z}$ son las soluciones de la ecuación inicial.

Ejemplo 20.2

Resuelva la siguiente ecuación:

$$2 \cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1.$$

Solución

$$2(1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x = 1,$$

$$2 - 2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 1,$$

$$2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0,$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4},$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1 \pm 3}{4},$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} x = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{sen} x = 1 \text{ si } x = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \text{ si } x = \frac{7\pi}{6} \text{ ó } x = \frac{11\pi}{6}.$$

Con base en la periodicidad de la función seno, las soluciones en $\mathbb{R}$ de la ecuación son:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad y \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 20.3

Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica:

$$2 \operatorname{sen} 3x - 1 = 0.$$

Solución

$$\operatorname{sen} 3x = \frac{1}{2},$$

$$3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ó} \quad 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Luego, todas las soluciones en $\mathbb{R}$ de la ecuación son de la forma:

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \quad y \quad x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 20.4

Halle los valores de x que satisfacen la siguiente ecuación:

$$\cos x + 1 = \operatorname{sen} x.$$

Solución

$$(\cos x + 1)^2 = \operatorname{sen}^2 x,$$

$$\cos^2 x + 2 \cos x + 1 = \operatorname{sen}^2 x,$$

$$\cos^2 x + 2 \cos x + 1 = 1 - \cos^2 x,$$

$$2 \cos^2 x + 2 \cos x = 0,$$

$$2 \cos x (\cos x + 1) = 0,$$

$$2 \cos x = 0 \quad \text{ó} \quad \cos x + 1 = 0,$$

$$\cos x = 0 \quad \text{ó} \quad \cos x = -1,$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ahora, como en el procedimiento para resolver la ecuación elevamos al cuadrado, debemos determinar cuáles de estos valores de x satisfacen la ecuación original.

- Si $x = \frac{\pi}{2}$, $\cos \frac{\pi}{2} + 1 = 0 + 1 = 1$ y $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$.

Por lo tanto $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ es solución de la ecuación original.

- Si $x = \frac{3\pi}{2}$, $\cos \frac{3\pi}{2} + 1 = 0 + 1 = 1$ y $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$.

Por lo tanto $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ no es solución de la ecuación original.

- Si $x = \pi$, $\cos \pi + 1 = -1 + 1 = 0$ y $\sin \pi = 0$.

Por lo tanto $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ es solución de la ecuación original.

Luego, las soluciones de la ecuación original son

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{y} \quad x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 20.5

Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\cos 5x - \cos 7x = 0.$$

Solución

$$\begin{aligned} \cos(6x - x) - \cos(6x + x) &= 0, \\ \cos 6x \cos x + \sin 6x \sin x - \cos 6x \cos x + \sin 6x \sin x &= 0, \\ 2 \sin 6x \sin x &= 0, \\ \sin 6x = 0 \quad \text{ó} \quad \sin x = 0, \\ 6x = k\pi \quad \text{ó} \quad x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$x = \frac{k\pi}{6} \quad \text{y} \quad x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

son las soluciones de la ecuación original.

Ejemplo 20.6

Encuentre todas las soluciones de la siguiente ecuación trigonométrica en el intervalo $[0, 2\pi)$:

$$\tan^4 x - 13 \tan^2 x + 36 = 0.$$

Solución

En primer lugar, factorizamos completamente la ecuación:

$$\begin{aligned} (\tan^2 x - 9)(\tan^2 x - 4) &= 0, \\ (\tan x + 3)(\tan x - 3)(\tan x + 2)(\tan x - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\tan x = -3 \quad \text{ó} \quad \tan x = 3 \quad \text{ó} \quad \tan x = -2 \quad \text{ó} \quad \tan x = 2.$$

Ahora, con una calculadora en modo radianes, al aplicar la función o tecla $\tan^{-1}$ obtenemos valores de x en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

- $\tan x = -3$ si $x = -1.249$.

Sin embargo $-1.249 \notin [0, 2\pi)$, entonces, como la función tangente es periódica, con período π , sumamos π :

$$-1.249 + \pi = 1.8926 \in [0, 2\pi).$$

Si sumamos nuevamente π

$$1.8926 + \pi = 5.0342 \in [0, 2\pi).$$

- $\tan x = 3$ si $x = 1.249 \in [0, 2\pi)$. Sumando π

$$1.249 + \pi = 4.391 \in [0, 2\pi)$$

- $\tan x = -2$ si $x = -1.1071$.

Sin embargo $-1.1071 \notin [0, 2\pi)$, entonces, como la función tangente es periódica, con período π , sumamos π :

$$-1.1071 + \pi = 2.0345 \in [0, 2\pi).$$

Sumando nuevamente π

$$2.0345 + \pi = 5.1761 \in [0, 2\pi)$$

- $\tan x = 2 : x = 1.1071 \in [0, 2\pi)$. Sumando π

$$1.1071 + \pi = 4.2487 \in [0, 2\pi).$$

De esta forma, las únicas 8 soluciones de la ecuación trigonométrica en el intervalo $[0, 2\pi)$ son:

$$x = 1.8926, x = 5.0342, x = 1.249, x = 4.391, \\ x = 2.0345, x = 5.1761, x = 1.1071 \text{ y } x = 4.2487.$$

Ejercicios

- Determine todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.
 - $\tan x \sen x + \sen x = 0$.
 - $\cos 3x = \sen 3x$.
 - $\sec x - \tan x = \cos x$.
- Determine las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0, 2\pi)$.
 - $\sec x \tan x - \cos x \cot x = \sen x$.
 - $\tan x + \cot x = 4 \sen 2x$.
 - $\sen 3x \cos x - \cos 3x \sen x = 0$.
 - $\tan 3x + 1 = \sec 3x$.

Talleres

Taller 1: Lecciones 1 y 2

1. Si las rectas L_1 y L_2 son paralelas y $c = 140^\circ$, halle la medida de los ángulos restantes:

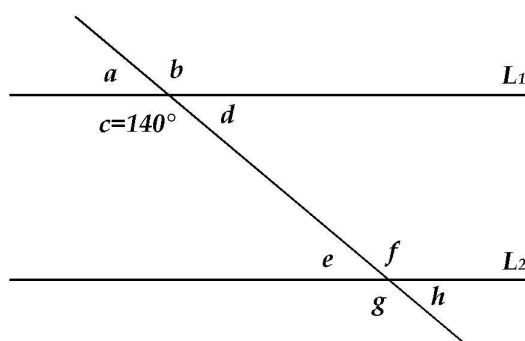


Figura T.1

2. Si las rectas L_1 y L_2 son paralelas, $b = 30^\circ$ y $j = 70^\circ$, halle la medida de los ángulos restantes:

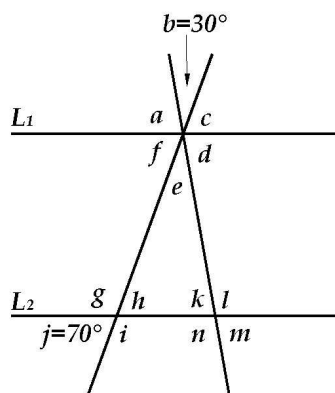


Figura T.2

3. Si L_1 y L_2 son paralelas, encuentre los valores de x y de y :

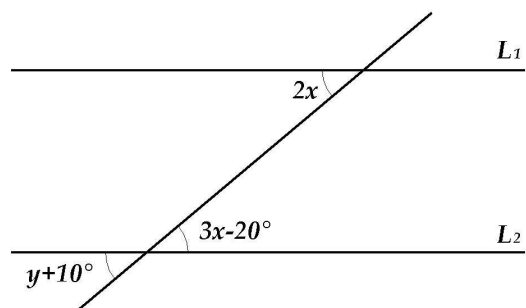


Figura T.3

4. Si L_1 y L_2 son paralelas, encuentre los valores de x y de y :

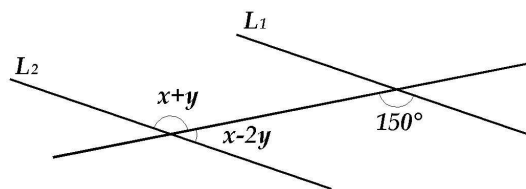


Figura T.4

5. Si el segmento $\overline{AB}$ es perpendicular al segmento $\overline{BC}$, halle el valor de y :

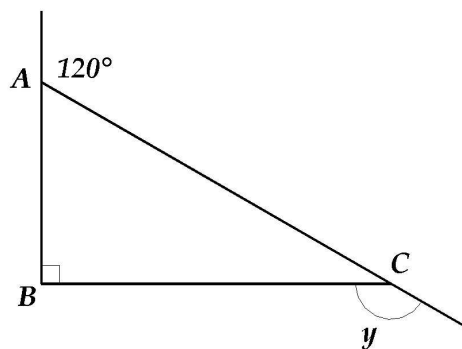


Figura T.5

6. Si L_1 y L_2 son paralelas, encuentre los valores de x y de y :

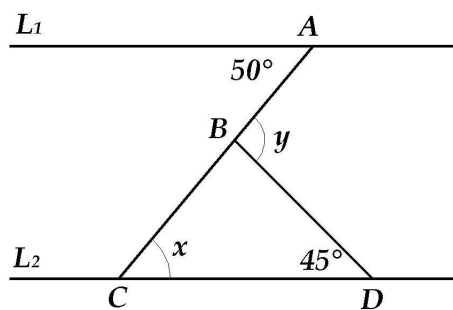


Figura T.6

7. Si L_1 y L_2 son paralelas, encuentre los valores de x y de y :

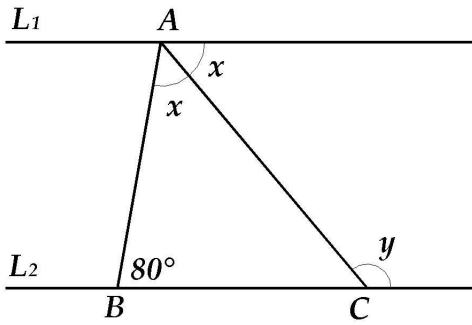


Figura T.7

8. Si L_1 , L_2 y L_3 son paralelas, encuentre los valores de x y de y :

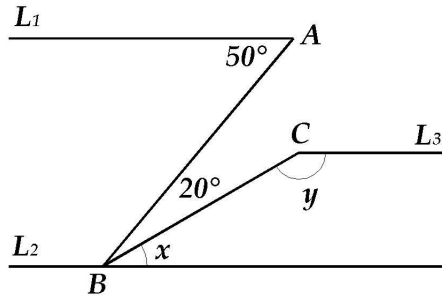


Figura T.8

9. Dado que $\overline{AC}$ es perpendicular a $\overline{CE}$, que $\overline{BF}$ es bisectriz de $\angle ABD$ y que $\overline{DF}$ es bisectriz de $\angle BDE$, halle el valor de $\angle BFD$.

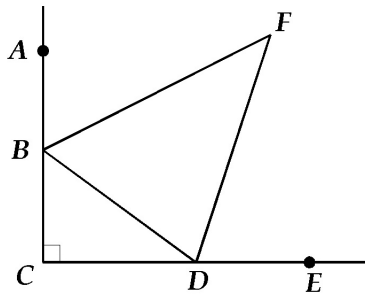


Figura T.9

10. Dado que $\triangle ACE$ es rectángulo en C , que $\overline{AB} \cong \overline{AF}$ y que $\overline{FE} \cong \overline{DE}$, halle el valor de $\angle BFD$.

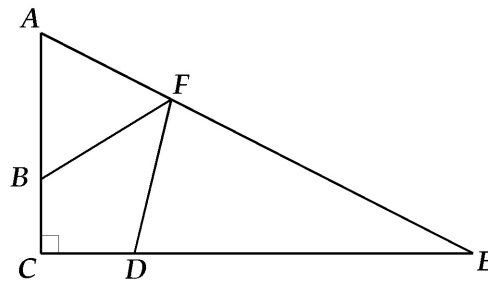


Figura T.10

11. Sabiendo que $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ son paralelos, demuestre que $\triangle ADE$ y $\triangle CBE$ son semejantes y escriba la proporcionalidad que se cumple.

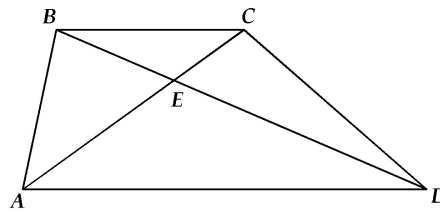


Figura T.11

12. Sabiendo que $\overline{DE}$ y $\overline{AB}$ son paralelos, determine la longitud del segmento $\overline{CD}$.

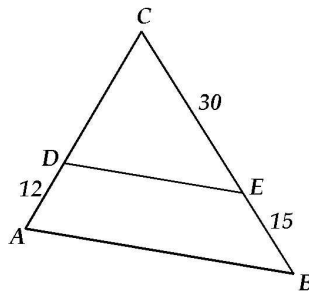


Figura T.12

13. Sabiendo que $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$ son paralelos, halle el valor de x .

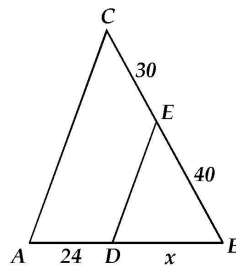


Figura T.13

14. (a) Demuestre que la bisectriz del ángulo interior de un triángulo, divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.
- (b) Sabiendo que $\overline{AD}$ es bisectriz de $\angle CAB$, calcule el valor de x .

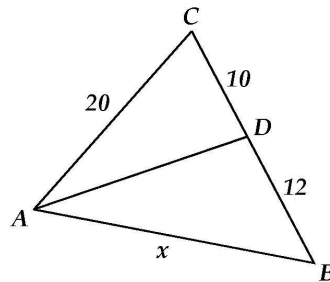


Figura T.14

- (c) Sabiendo que $\overline{BD}$ es bisectriz de $\angle ABC$, calcule el valor de x .

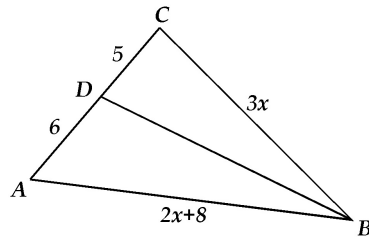


Figura T.15

15. Sabiendo que el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo, encuentre los valores de x y y .

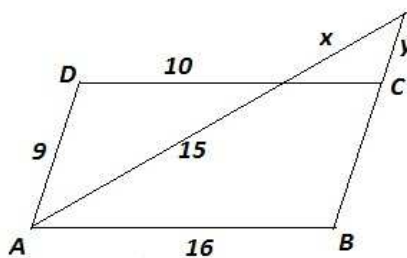


Figura T.16

Taller 2: Lecciones 3 y 4

1. Sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero con lado L . Si desde cada uno de los vértices se traza un arco de circunferencia con radio $\frac{L}{2}$, como se muestra en la figura T.1, calcule el área sombreada en términos de L .

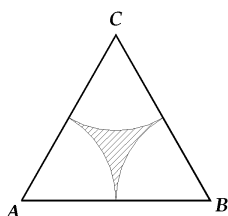


Figura T.1

2. El perímetro de la figura T.2 que se muestra a continuación es 20 m. Halle el valor de R y calcule el área de la región.

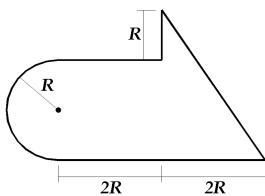


Figura T.2

3. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado L . Si desde los vértices B y D se traza $1/4$ de arco de circunferencia con radio L , tal y como se muestra en la figura T.3, calcule el área sombreada.

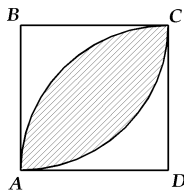


Figura T.3

4. Un sólido está conformado por un cilindro circular recto de radio R y altura $2R$, una semiesfera en un extremo y en el otro un cono circular recto de altura R (ver figura T.4). El volumen total del sólido es $3\pi m^3$. Halle el área de su superficie.

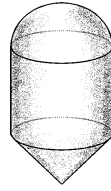


Figura T.4

5. Calcule el volumen de un tronco de cono de 7.6 cm de altura, sabiendo que los radios de sus bases miden 4.9 cm y 2.1 cm.
6. Encuentre el volumen del sólido de la figura T.5, compuesto por un prisma y una pirámide, cuyas bases son un hexágono regular de lado 4 cm.

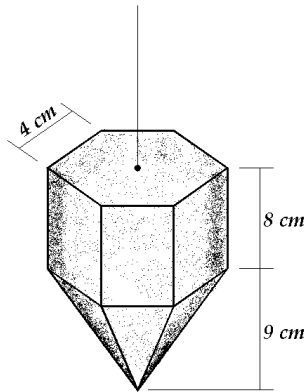


Figura T.5

7. Una encuesta aplicada a un grupo de jóvenes, acerca de las preferencias por alguna radio F.M. de la región, señaló que:
 - 277 preferían Salsa Estéreo.
 - 233 preferían 92.4 F.M. (Emisora U.P.B).
 - 405 preferían 100.4 F.M. (Emisora Unal).
 - 165 preferían 92.4 F.M. y 100.4 F.M.
 - 120 preferían 92.4 F.M. y Salsa Estéreo
 - 190 preferían Salsa Estéreo y 100.4 F.M.
 - 105 preferían las tres estaciones de radio mencionadas.

Responda:

- (a) ¿Cuántos jóvenes fueron encuestados?
 - (b) ¿Cuántos jóvenes prefieren sólo Salsa Estéreo?
 - (c) ¿Cuántos jóvenes prefieren sólo Salsa Estéreo y 100.4 F.M.?
8. Sombree los siguientes conjuntos:

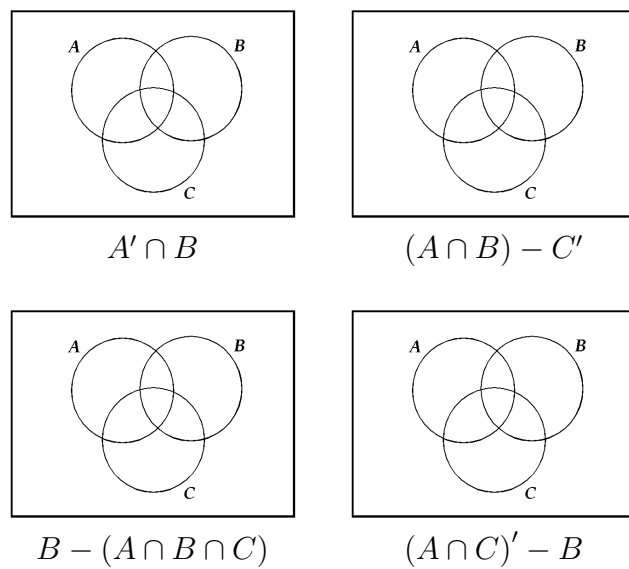


Figura T.6

9. En cada uno de los siguientes conjuntos, diga cuál es la parte sombreada.

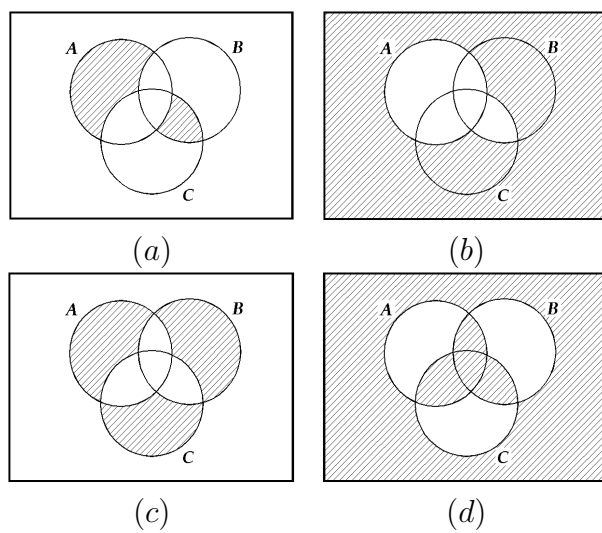


Figura T.7

10. Efectúe las operaciones indicadas:

(a)
$$\frac{1 - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$$

$$(b) \frac{\frac{2}{5} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} - \frac{2}{15}}$$

$$(c) \frac{3}{280} + \frac{1}{150} + \frac{11}{225}.$$

11. Escriba cada enunciado en términos de desigualdades:

(a) x es positiva.

(b) t es menor que 4.

(c) a es mayor o igual a π .

(d) x es menor que $\frac{1}{3}$ y es mayor que -5 .

(e) La distancia desde p hasta 3 es cuando mucho 5.

12. Efectúe la operación de conjuntos indicada y grafique su respuesta:

(a) $[-4, 6) \cup [0, 8)$

(b) $[-4, 6) \cap [0, 8)$

(c) $(-\infty, 6] \cup (2, 10)$

13. Exprese cada uno de los decimales periódicos en forma de fracción:

$$(a) \ 5.\overline{23} \quad (b) \ 1.3\overline{7} \quad (c) \ 2.1\overline{35}$$

Taller 3: Lecciones 5 y 6

1. Simplifique cada una de las siguientes expresiones:

(a) $\sqrt{75} + \sqrt{48}$

(b) $\sqrt[3]{96} + \sqrt[3]{3}$.

2. Simplifique las siguientes expresiones y elimine todos los exponentes negativos:

(a) $\left(\frac{ab^2c^{-3}}{2a^3b^{-4}}\right)^{-2}$

(b) $(3ab^2c)\left(\frac{2a^2b}{c^3}\right)^{-2}$.

3. Simplifique las expresiones y elimine todos los exponentes negativos. Suponga que las letras representan números positivos:

(a) $\left(\frac{x^{-2}y^3}{x^2y}\right)^{-1/2} \left(\frac{x^3y}{y^{1/2}}\right)^2$

(b) $\left(\frac{-2x^{1/3}}{y^{1/2}z^{1/6}}\right)^4$

4. Verifique que:

$$\left(\frac{x^{a+b}}{x^{2b}}\right) \left(\frac{x^{b+c}}{x^{2c}}\right) \left(\frac{x^{c+a}}{x^{2a}}\right) = 1.$$

5. Considere los polinomios

$$P(x) = 4x^2 - 1,$$

$$Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2,$$

$$R(x) = 6x^2 + x + 1,$$

$$S(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4,$$

$$T(x) = \frac{3}{2}x^2 + 5.$$

Calcular los siguientes polinomios: $P(x) + 2Q(x) - R(x)$ y $T(x)Q(x)$.

6. En cada literal determine el cociente y el residuo si se divide $f(x)$ entre $p(x)$.

(a) $f(x) = 3x^3 + 2x - 4,$

$$p(x) = 2x^2 + 1.$$

(b) $f(x) = \frac{3}{4}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{37}{40}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{19}{30}x - \frac{4}{5},$

$$p(x) = 2x^3 - \frac{1}{3}x + 2.$$

7. Para cada una de las divisiones señaladas, calcule el cociente y el residuo correspondientes. Utilice en cada literal la regla de Ruffini (división sintética).

(a) $\frac{6x^3 - 2x^2 + 4x - 1}{x - 3}.$

(b) $\frac{x^4 + x + 1}{x - 1}$

Taller 4: Lecciones 7 y 8

1. Factorice las siguientes expresiones:

(a) $x^3 - x^2 - 56x$

(b) $x^4 + 10x^2 + 25$

(c) $2x^2 + x - 1$

(d) $a^3 + 27b^3 + a + 3b$

(e) $81c^4 - d^4$

(f) $xy - vy + xz + wy + wz - vz$

(g) $X^{8m} - 16Y^{4n}$, donde $m, n \in \mathbb{N}$

(h) $y^4(y+2)^3 + y^5(y+2)^4$

(i) $(a^2 + 2a)^2 - 2(a^2 + 2a) - 3$

(j) $\frac{1}{2}x^{-1/2}(3x+4)^{1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2}(3x+4)^{-1/2}$.

2. Simplifique las siguientes expresiones:

(a) $\frac{y^2 - 3y - 18}{2y^2 + 5y + 3}$

(b) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x - 3} \cdot \frac{3 - x}{3 + x}$

(c) $\frac{4y^2 - 9}{2y^2 + 9y - 18} \div \frac{2y^2 + y - 3}{y^2 + 5y - 6}$

(d) $\frac{2}{a^2} - \frac{3}{ab} + \frac{4}{b^2}$

(e) $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{3}{x^2-1}$.

Taller 5: Lecciones 9 y 10

1. Racionalice el denominador en las siguientes expresiones:

(a) $\frac{2}{3 - \sqrt{5}}$

(b) $\frac{y}{\sqrt{3} + \sqrt{y}}$

(c) $\frac{1}{\sqrt{m} - \sqrt[4]{n}}$

(d) $\frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$

2. Racionalice el numerador en la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt{2(x+h)+1} - \sqrt{2x+1}}{h}.$$

3. Simplifique las siguientes expresiones:

(a) $\frac{x}{x^2 - x - 6} - \frac{1}{x + 2} - \frac{2}{x - 3}$

(b) $\frac{\left(a + \frac{1}{b}\right)^m \left(a - \frac{1}{b}\right)^n}{\left(b + \frac{1}{a}\right)^m \left(b - \frac{1}{a}\right)^n}$

(c) $\sqrt{1 + \left(x^3 - \frac{1}{4x^3}\right)^2}$

4. Evalúe las siguientes funciones en los valores indicados.

(a) $h(t) = t + \frac{1}{t}$; $h(-1)$, $h(2)$, $h\left(\frac{1}{x}\right)$

(b) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$; $f(0)$, $f(1.5)$, $f(2)$, $f(3)$

5. Para cada una de las siguientes funciones, calcule el valor de $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

(a) $f(x) = \frac{2x}{x - 1}$

(b) $f(x) = (x - 1)^3$.

6. Encuentre el dominio de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \frac{x - 1}{9 - x^2}$

(b) $g(x) = \left(\frac{1}{x^2 - 5x - 14} \right)^2$

7. Calcule la ecuación de la recta que cumpla las condiciones dadas.

(a) Pasa por $(-2, 4)$ y tiene pendiente -1 .

(b) Pasa por $(-1, -2)$ y $(4, 3)$.

(c) Cruza el eje y en $y = 6$ y es paralela a la recta $2x + 3y + 4 = 0$.

(d) Pasa por $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ y es perpendicular a la recta $4x - 8y = 1$.

(e) Pasa por $(-2, -11)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(1, 1)$ y $(5, -1)$.

8. Demuestre que las rectas que corresponden a las ecuaciones $3x + 5y + 7 = 0$ y $6x + 10y - 5 = 0$, son paralelas.

9. Obtenga el valor de k de tal manera que las rectas con ecuaciones $3kx + 8y = 5$ y $6y - 4kx = -1$ sean perpendiculares.

10. Utilice las pendientes para demostrar que los puntos $A(-3, -1)$, $B(3, 3)$ y $C(-9, 8)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

Taller 6: Lecciones 11 y 12

1. Encuentre, si es que existen, todas las soluciones reales de la ecuación:

(a) $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2} = 0$

(b) $\sqrt{5\sqrt{t} - t - 1} = \sqrt{5}$

(c) $\sqrt{5-x} + 1 = x - 2$

(d) $\sqrt{5+x} - \sqrt{x} = 1$

(e) $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$

(f) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

(g) $|2x - 7| = 3$

(h) $|3x - 7| = x + 2$

(i) $|x - 4| = |x - 2|$

(j) $|4x - 2| = x - 5$

2. Halle la ecuación de la circunferencia que tiene como centro el punto $C(2, -3)$ y que contiene al punto $(2, 0)$. Grafique.
3. Halle la ecuación de la circunferencia que tiene un diámetro con extremos en los puntos $A(-1, -5)$ y $B(5, -3)$. Grafique.
4. Halle la ecuación de la circunferencia que contiene los puntos $(-3, 2)$, $(4, -1)$ y $(5, 2)$.
5. Encuentre, si es que existen, todas las soluciones reales de la ecuación:

(a) $z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{9}{16} = 0$

(b) $w^2 = 3(w - 1)$

(c) $5x^2 - 7x + 5 = 0$

6. ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación cuadrática $x^2 + 2.21x + 1.21 = 0$?
7. ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación cuadrática $x^2 + rx - s = 0$ con $s > 0$?

Taller 7: Lecciones 13 y 14

1. Resuelva el sistema o demuestre que no tiene solución. Si el sistema tiene una cantidad infinita de soluciones, exprese las en la forma de par ordenado $(t, y(t))$.

(a)
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} -3x + 2y = 2 \\ 6x - 4y = -7 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} -7x + 3y = 1 \\ 14x - 6y = -2 \end{cases}$$

(e)
$$\begin{cases} x - 5y = -4 \\ -3x + 15y = 12 \end{cases}$$

2. En una comunidad de 8000 personas, la velocidad con la que se difunde un rumor es conjuntamente proporcional al número de personas que lo han escuchado y al número de personas que no lo han escuchado. Cuando 20 personas han escuchado el rumor, éste circula con una velocidad de 200 personas por hora. Encuentre un modelo que exprese la velocidad a la que se esparce el rumor en términos del número de personas que lo han escuchado.
3. Un envase cerrado de hojalata, cuyo volumen es de 60 pul^3 , tiene la forma de un cilindro circular recto. Suponga que el costo del material para las tapas, por unidad de área, es dos veces el costo del material para los lados. Si se sabe que el material para las tapas tiene un costo de 200 pesos por pul^2 , encuentre un modelo que exprese el costo total del material como una función del radio de la base del envase.
4. Una caja abierta tiene una base cuadrada y un volumen de 4000 pul^3 . Encuentre un modelo que exprese el área superficial de la caja como función de la longitud del lado de la base cuadrada.
5. Considere una esfera de radio 5 cm. Para una constante positiva r en el intervalo $(0, 5]$, considere el **cono inscrito en la esfera** que tiene una base de radio r y una altura h (h depende de r), $h \geq 5$. Haga un dibujo de la situación planteada y exprese el volumen del cono como función de r .

Taller 8: Lecciones 15 y 16

1. Encuentre la solución de la desigualdad

$$2x^2 + x + 10 > 0.$$

2. Resuelva la desigualdad

$$-3 < 5 - 2x < 7.$$

3. Resuelva la siguiente desigualdad.

$$5x^2 + 3x \geq 3x^2 + 2.$$

4. Resuelva la desigualdad

$$\frac{x+2}{x+3} < \frac{x-1}{x-2}.$$

5. Resuelva la desigualdad

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \leq 0.$$

6. Se da la medida de un ángulo en posición estándar. Encuentre dos ángulos positivos y dos ángulos negativos que sean coterminales con el ángulo dado.

$$(a) \ 135^\circ \quad (b) \ \frac{11\pi}{6} \quad (c) \ -48^\circ.$$

7. Determine si los siguientes ángulos son coterminales.

$$(a) \ -30^\circ \text{ y } 330^\circ \quad (b) \ \frac{32\pi}{3} \text{ y } \frac{11\pi}{3}.$$

8. Encuentre un ángulo entre 0 y 2π que sea coterminal con el ángulo $\frac{51\pi}{2}$.

9. Encuentre un ángulo entre 0° y 360° que sea coterminal con el ángulo -10000° .

Taller 9: Lecciones 17 y 18

1. Para cada uno de los siguientes casos, bosqueje el triángulo rectángulo que tiene ángulo agudo θ , y encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas de θ .

(a) $\sec \theta = \frac{7}{2}$.

(b) $\csc \theta = \frac{13}{12}$.

(c) $\tan \theta = \frac{3}{4}$.

2. Verificar las siguientes igualdades

(a) $\cos^2(120^\circ) - \sin^2(120^\circ) = \cos 240^\circ$.

(b) $5 \tan^2 30^\circ = \sec 60^\circ - \frac{\csc 90^\circ}{\csc 30^\circ + 1} (\cos 0^\circ)$.

(c) $\frac{\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1 - \tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

3. Desde la parte superior de un faro de 200 pies, el ángulo de depresión respecto a un barco en el océano es de 23° . ¿Qué tan lejos está el barco desde la base del faro?
4. Desde un punto sobre el suelo a 500 pies de la base de un edificio, se observa que el ángulo de observación hasta la parte superior del edificio es de 60° y que el ángulo de elevación hasta la parte superior del asta de la bandera del edificio es de 75° . Determinar la altura del edificio y la longitud del asta de la bandera.
5. Un cuadro localizado sobre una pared, es tal que su borde inferior está a una distancia de 20cm sobre el nivel del ojo de un observador situado a 2 metros de la pared. Si el ángulo que forman las visuales con los bordes inferior y superior, respectivamente, mide 15° . ¿Cuál es la altura del cuadro?
6. Un árbol está sostenido por un alambre que se extiende desde 1.5 metros debajo del punto más alto del árbol hasta una estaca en el suelo. El alambre mide 24 metros de largo y forma un ángulo de 30° con el suelo. ¿Qué altura tiene el árbol?
7. Use la ley de seno para resolver los posibles triángulos ABC que satisfacen las condiciones dadas.

(a) $a = 30$, $c = 40$, $A = 37^\circ$

- (b) $b = 73$, $c = 82$, $B = 58^\circ$
8. Los puntos A y B están separados por un lago. Para hallar la distancia entre ellos un topógrafo localiza un punto C sobre el suelo tal que $CAB = 48.6^\circ$. También mide CA como 312 pies y CB como 527 pies. Encuentre la distancia entre A y B .
9. Un piloto está volando sobre una carretera recta. Él encuentra que los ángulos de depresión a 2 postes indicadores de millas, a 5 millas de distancia entre si tienen los valores de 32° y 48° , según se observa en la figura T.1.

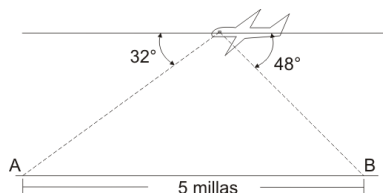


Figura T.1

- (a) Determinar la distancia del aeroplano al punto A .
- (b) Determinar la altitud del aeroplano.
10. Use la ley de coseno para resolver los triángulos ABC que satisfacen las condiciones dadas.
- (a) $a = 65$, $c = 50$, $B = 52^\circ$.
- (b) $b = 60$, $c = 30$, $A = 70^\circ$.
11. Dos carreteras rectas divergen en un ángulo de 65° , es decir, el ángulo entre ellas es de 65° . Dos automóviles salen de la intersección a las 2:00 p.m., uno viaja a 50 *metros/h* y el otro a 30 *metros/h*. ¿Qué tan apartados están los automóviles a las 2:30 p.m.?
12. Una torre de 125 pies está instalada en una ladera de una montaña que tiene una inclinación de 32° con la horizontal. Debe colocarse un cable guía desde la parte superior de la torre y anclarse a un punto a 55 pies ladera abajo de la base de la torre. Determinar cuál es la magnitud más corta de cable que se necesita.

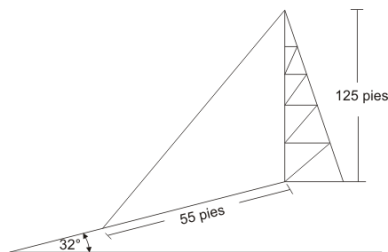


Figura T.2

Taller 10: Lecciones 19 y 20

1. Verifique la identidad.

(a) $\frac{\cot x \sec x}{\csc x} = 1.$

(b) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x.$

(c) $\frac{1 + \sec^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1 + \cos^2 x.$

(d) $(\tan x + \cot x)^4 = \csc^4 x \sec^4 x.$

(e) $\cos^2 x - \sin^2 x \tan^2 x = \frac{\sec^2 x}{\sec(2x)}.$

(f) $\cos(x + y) \cos(x - y) = \cos^2 x - \sin^2 y.$

(g) $\frac{\sin x + \sin(3x) + \sin(5x)}{\cos x + \cos(3x) + \cos(5x)} = \tan(3x).$

2. Calcule el valor exacto de las siguientes expresiones sin usar calculadora.

(a) $\cos \frac{17\pi}{12}.$

(b) $\cos 112.5^\circ.$

(c) $\cos \frac{3\pi}{8}.$

(d) $3 \cos 37.5^\circ \cos 7.5^\circ.$

3. Escriba la función $3 \sin \pi x + 3\sqrt{3} \cos \pi x$ sólo en términos de seno.

4. Determine $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ y $\tan 2\theta$ a partir de la información proporcionada.

(a) $\tan \theta = -\frac{4}{3}$, θ en el cuadrante II.

(b) $\sec \theta = 2$, θ en el cuadrante IV.

5. Calcule $\sin \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2}$ y $\tan \frac{\theta}{2}$ a partir de la información proporcionada.

(a) $\cos \theta = -\frac{4}{5}$, $180^\circ < \theta < 270^\circ.$

(b) $\cot \theta = 5$, $180^\circ < \theta < 270^\circ.$

6. Determine todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

- (a) $\sqrt{2} \cos x - 1 = 0.$
 - (b) $2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0.$
 - (c) $3 \tan^3 x - 3 \tan^2 x - \tan x + 1 = 0.$
 - (d) $\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x = \cos 4x.$
7. Determine las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0, 2\pi)$.
- (a) $3 \operatorname{csc}^2 x = 4.$
 - (b) $\tan \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 0.$
 - (c) $\cos x \cos 2x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}.$

Bibliografía

- [AO] C. Allendoerfer, C. Oakley, *Matemáticas universitarias*, cuarta edición, Editorial McGraw-Hill, 1990.
- [B] A. Baldor, *Geometría plana y del espacio, con una introducción a la Trigonometría*, Ediciones y distribuciones Códice, S. A., Madrid, 1967.
- [LH] R. Larson, R. Hostetler, *Algebra and Trigonometry*, fifth edition, Houghton Mifflin Company, New York, 2001.
- [L] L. Leithold, *Álgebra y Trigonometría, con Geometría Analítica*, Editorial Harla, S.A., México, 1994.
- [S] J. Stewart, L. Redlin, S. Watson, *Precálculo, Matemáticas para el Cálculo*, quinta edición, Editorial Cengage Learning, 2007.
- [SL] M. Sullivan, *Álgebra y Trigonometría*, séptima edición, Editorial Pearson Educación, S.A., México, 2006.
- [SC] E. Swokowski, J. Cole, *Álgebra y trigonometría*, novena edición, International Thomson editores, 1997.
- [WG] P. Wisniewski, A. Gutierrez A., *Introducción a las matemáticas universitarias*, Serie Schaum, Editorial McGrawHill, 2003.
- [ZD] D. Zill, J. Dewar, *Precálculo*, cuarta edición, Editorial McGraw-Hill, 2008.

Índice

- Ángulo, [2](#)
- Ángulo agudo, [2](#)
- Ángulo de referencia, [112](#)
- Ángulo llano, [2](#)
- Ángulo obtuso, [2](#)
- Ángulo recto, [2](#)
- Ángulo vértice, [10](#)
- Ángulos adyacentes, [3](#)
- Ángulos alternos externos, [4](#)
- Ángulos alternos internos, [4](#)
- Ángulos complementarios, [3](#)
- Ángulos congruentes, [3](#)
- Ángulos correspondientes, [4](#)
- Ángulos coterminales, [110](#)
- Ángulos entre rectas, [4](#)
- Ángulos opuestos por el vértice, [4](#)
- Ángulos suplementarios, [3](#)
- Ángulos, definición, [109](#)
- Ángulos, grados, [2](#)
- Ángulos, medida de, [109](#)

- Círculo, [17](#), [20](#)
- Cilindro circular recto, [23](#)
- Circunferencia, [17](#), [20](#), [86](#)
- Circunferencia, diámetro, [18](#)
- Circunferencia, radio, [17](#)
- Conjunto vacío, [28](#)
- Conjuntos, [27](#)
- Conjuntos, complemento, [31](#)
- Conjuntos, comprensión, [27](#)
- Conjuntos, diferencia, [31](#)
- Conjuntos, elementos, [27](#)
- Conjuntos, extensión, [27](#)
- Conjuntos, intersección, [30](#)
- Conjuntos, operaciones, [30](#)
- Conjuntos, subconjunto, [29](#)
- Conjuntos, unión, [30](#)
- Cono circular recto, [24](#)
- Coseno, ley de, [127](#)
- Cuadrado, [18](#)
- Cubo, [23](#)

- Cuerpo redondo, [22](#)
- Cuerpos geométricos, [22](#)

- Desigualdades lineales, [102](#)
- Desigualdades no lineales, [103](#)
- Desigualdades, definición, [101](#)
- Desigualdades, solución, [101](#)
- Diferencia de cuadrados, [55](#)
- Diferencia de cubos, [55](#)
- Distancia en el plano, [86](#)

- Ecuación, definición, [75](#)
- Ecuaciones cuadráticas, [77](#)
- Ecuaciones de orden superior, [77](#)
- Ecuaciones lineales, [76](#)
- Ecuaciones trigonométricas, definición, [139](#)
- Ecuaciones, otros tipos, [83](#)
- Esfera, [25](#)
- Exponenciación, [39](#)
- Exponenciación, base, [39](#)
- Exponenciación, exponente, [39](#)
- Exponenciación, exponentes enteros, [39](#)
- Exponenciación, exponentes racionales, [43](#)
- Exponenciación, leyes, [40](#)
- Expresiones algebraicas, [47](#)
- Expresiones algebraicas, variables, [47](#)
- Expresiones fraccionarias, [60](#)

- Fórmula cuadrática, [80](#)
- Factorización, [55](#), [59](#)
- Factorización, factor común, [55](#)
- Factorización, trinomio, [56](#)
- Figuras planas, [17](#)
- Figuras planas, área, [18](#)
- Figuras planas, perímetro, [18](#)
- Fracciones compuestas, [63](#)
- Funciones lineales, [71](#)
- Funciones trigonométricas, [115](#)
- Funciones, definición, [67](#)
- Funciones, dominio y rango, [68](#)
- Funciones, evaluación de, [68](#)
- Funciones, gráfica de, [70](#)

Identidad trigonométrica, definición, [131](#)
 Identidades trigonométricas, demostración de, [132](#)
 Intervalos, [31](#)
 Intervalos abiertos, [32](#)
 Intervalos cerrados, [32](#)

 Línea recta, [1](#)

 Modelamiento matemático, [95](#)

 Números enteros, [27](#)
 Números irracionales, [28](#)
 Números naturales, [27](#)
 Números racionales, [27](#)
 Números reales, [28](#)
 Números reales, distancia, [34](#)

 Paralelepípedo rectangular, [23](#)
 Paralelogramo, [19](#)
 Pirámide, [24](#)
 Polígono, [17](#)
 Poliedro, [22](#)
 Polinomios, [47](#)
 Polinomios, coeficientes, [47](#)
 Polinomios, división, [48](#)
 Polinomios, división sintética, [50](#)
 Polinomios, grado, [47](#)
 Polinomios, multiplicación, [48](#)
 Polinomios, suma, [47](#)
 Prisma, [24](#)
 Productos notables, [53](#)

 Racionalización, [64](#)
 Radicación, [43](#)
 Rayo, [1](#)
 Rectángulo, [18](#)
 Rectas paralelas, [3](#)
 Rectas paralelas y perpendiculares, [73](#)
 Rectas perpendiculares, [4](#)
 Representación decimal, [28](#)

 Sólidos, [22](#)
 Sólidos, área superficial, [23](#)
 Sólidos, volumen, [23](#)
 Segmento de recta, [1](#)
 Semirecta, [1](#)
 Seno, ley de, [123](#)

 Sistemas 2×2 , [89](#)
 Sistemas 2×2 , método de eliminación, [91](#)
 Sistemas 2×2 , método de sustitución, [90](#)
 Suma de cubos, [55](#)

 Teorema de las paralelas, [4](#)
 Teorema de Pitágoras, [22](#)
 Teorema de Thales, [11](#)
 Trapecio, [19](#)
 Triángulos, [5](#), [19](#)
 Triángulos rectángulos, aplicaciones, [119](#)
 Triángulos, ángulos exteriores, [6](#)
 Triángulos, ángulos interiores, [6](#)
 Triángulos, altura, [6](#)
 Triángulos, base, [6](#), [10](#)
 Triángulos, bisectriz, [6](#)
 Triángulos, clasificación, [9](#)
 Triángulos, criterio A-A, [11](#)
 Triángulos, lados, [5](#)
 Triángulos, mediana, [6](#)
 Triángulos, mediatriz, [6](#)
 Triángulos, semejanza, [10](#)
 Triángulos, Teorema de Thales, [11](#)
 Triángulos, vértices, [5](#)
 Trinomio cuadrado perfecto, [55](#)

 Valor absoluto, [34](#)
 Valor absoluto, propiedades, [35](#)