Universidad Católica de Córdoba
Universidad Jesuita

Álgebra

Juan Lancioni

EDUCC
EDITORIAL
UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CÓRDOBA

Lancioni, Juan
Álgebra / Juan Lancioni. - 1a ed. - Córdoba : EDUCC - Editorial de la Universidad Católica de Córdoba, 2017.
Libro digital, PDF - (Cátedra)

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-987-626-367-2

1. Álgebra. 2. Educación Superior. I. Título.
CDD 512.150711

Maquetación interior : Fabio Viale.

ISBN 978-987-626-367-2

UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CÓRDOBA
Universidad Jesuita

Obispo Trejo 323. X5000IYG
Córdoba. República Argentina
Tel./Fax: +(54-351) 4286171
educc@ucc.edu.ar - www.uccor.edu.ar

Índice

Introducción

La intención de esta guía de temas teóricos y de ejercitación es poder rever conceptos de álgebra elemental abordados en el nivel medio de educación, para que usted pueda utilizarlos y aplicarlos sin inconvenientes al ingresar a la carrera de Ingeniería. Es lógico pensar que, a estos contenidos, luego se le sumarán otros propios del currículum de la especialidad de ingeniería elegida, que le permitirá concretar verdaderos proyectos de ingeniería haciendo uso de todas estas herramientas de cálculo aprendidas.

Piense que, sin ir más lejos, el siglo XX ha sido un período de extraordinarios avances científicos y tecnológicos; el avión, el automóvil, la radio, los satélites artificiales, las naves espaciales, la televisión, la telefonía celular, etc., son algunas de sus realizaciones. ¿Sabe qué ciencia está detrás de todas ellas? La matemática. Creo que hay motivos más que suficientes para empezar a caminar juntos a partir de este momento, es por eso que le deseo muy buena suerte.

Tema 1

Los números reales

Los números 1, 2, 3, etc. se denominan ***números naturales***. Son los que habitualmente usamos para contar. Si sumamos o multiplicamos dos números naturales cualesquiera, el resultado siempre es otro número natural. Por ejemplo:

$$8+5=13$$
$$9\cdot 3=27$$

En cambio, si restamos o dividimos dos números naturales, el resultado no siempre es un número natural. Por ejemplo:

$$8-3=5$$
$$9\div 3=3$$

son números naturales, pero:

$$5-8=\ldots$$
$$2\div 7=\ldots$$

no dan como resultado un número natural.

Para salvar esta dificultad, es que se extiende el sistema de los números naturales al sistema de los ***números enteros***, en donde se agregan a los naturales los ***enteros negativos***, es decir, los naturales precedidos por el signo menos y el cero. Si bien con esto se resuelve que la suma, multiplicación o resta de dos enteros cualesquiera es otro entero, ¿qué ocurre con la división? Por ejemplo:

$$8\div(-4)=-2$$
$$9\div 7=\ldots$$

Esta limitación se puede salvar incorporando nuevos números como los ***números racionales***. Así, se define a un número racional como el cociente de dos números enteros, pero con denominador distinto de cero. Por ejemplo:

$$\frac{3}{4};-\frac{8}{3};\frac{-2}{9};etc.$$

Estos números son muy usados a la hora de medir longitudes, pesos, voltajes, etc. ¿Sirven los números racionales para medir todas estas magnitudes? La respuesta es, solo en parte. Este sorprendente hecho fue descubierto por los antiguos griegos varios siglos antes de Cristo. Demostraron que a pesar de que $\sqrt{2}$ mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados tienen longitudes unitarias, no pueden escribirse como el cociente de dos números enteros. Por lo tanto $\sqrt{2}$ no es un número racional, sino irracional.

Entonces los ***números irracionales*** son aquellos que no se pueden expresar como el cociente de dos números enteros. Otros ejemplos los son: $\sqrt{3};\pi;e$, y una gran cantidad de números más.

Todos estos números conforman el conjunto de los números reales. A modo de síntesis:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Naturales: } \mathbf{N}\\ 0\ \ \text{(cero)}\\ \text{Enteros negativos}\end{array}\right\} \text{Enteros: } \mathbf{Z}\\ \qquad\qquad\qquad\quad \text{Fraccionarios}\end{array}\right\} \text{Racionales: } \mathbf{Q}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{Irracionales}\end{array}\right\} \text{Números reales: } \mathbf{R}$$

También existen los números complejos que completan todo el sistema de números que utilizaremos a lo largo de este curso. Recordar que los números complejos están formados por: una parte real y otra imaginaria. Por ej.: $-4+3\cdot i;1-8\cdot i;0+i$ donde: $i=\sqrt{-1}$ o bien: $i^2=-1$.

Operaciones algebraicas básicas

Se entiende por operaciones básicas: la suma, la sustracción, el producto y el cociente. Lo que debe tener presente en cada caso son las reglas de los signos correspondientes, que se detallan y especifican a continuación:

\# Un signo (+) que precede a un paréntesis, corchete o llave, ***no cambia*** los signos interiores. Por ejemplo:

$$-3+(4+7)=-3+4+7=8$$

\# Un signo (-) que antecede a un paréntesis, corchete o llave, ***cambia*** los signos interiores. Por ejemplo:

$$-3-(-4+8)=-3+4-8=-7$$

\# En el caso del producto, se cumple:

$$a)\ (+)\cdot(+)=(+)\quad b)\ (-)\cdot(-)=(+)$$
$$c)\ (+)\cdot(-)=(-)\quad d)\ (-)\cdot(+)=(-)$$

Por ejemplo:

$$9\cdot(-3)=-27$$
$$(-1)\cdot(-3)=3$$

\# Para el cociente, se cumple:

$$a)\frac{(+)}{(+)}=(+)\quad b)\frac{(-)}{(-)}=(+)$$
$$c)\frac{(-)}{(+)}=(-)\quad d)\frac{(+)}{(-)}=(-)$$

Por ejemplo:

$$\frac{9}{-3}=-3$$
$$\frac{-10}{-2}=5$$

Otros ejemplos de operaciones sencillas:

$$\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{7}\right)=\frac{14-3}{21}=\frac{11}{21}$$

$$\frac{4}{3}-\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{32+3}{24}=\frac{35}{24}$$

$$\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{15}$$

$$-\frac{1}{7}\cdot\frac{14}{3}=-\frac{2}{3}$$

Para estos dos últimos ejemplos de productos de fracciones, se aconseja simplificar numeradores con denominadores (si se puede) y luego operar algebraicamente.

Como usted podrá observar en los dos siguientes ejemplos, un cociente de fracciones, o una fracción de fracción, se puede resolver transformando el cociente en un producto, multiplicando por la recíproca del denominador.

$$\frac{4}{3}\div\frac{8}{3}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{3}\div 4=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{12}$$

Es fundamental recordar el orden de las operaciones. Los paréntesis indican prioridades, las multiplicaciones o divisiones también. El pasaje de términos de un lado a otro del signo igual es también importante y es la causa más frecuente de errores. En operaciones de suma y resta, si un término cambia de miembro, cambia el signo de la operación. En operaciones de multiplicación o división, si un término cambia de miembro, cambia la operación. Se da a continuación varios ejemplos válidos y no válidos.

$$2 \cdot (4+6) = 2 \cdot (10) = 20$$

$$\left(3 \cdot (-2)\right) + 4 = -6 + 4 = -2$$

En estos ejercicios conviene separar en términos a la hora operar matemáticamente:

$$\frac{7-3}{2} - 2 = \frac{4}{2} - 2 = 0$$

$$(2 \cdot 3) - \frac{12}{3} = 6 - 4 = 2$$

Si se trata de transponer términos: $7 + (-2) = 5$ o bien $7 = 5 + 2$

$\frac{8-2}{4} = \frac{3}{2}$ o bien $8 - 2 = \frac{3}{2} \cdot 4$ que es lo mismo que $8 - 2 = 6$

$2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ pero no vale hacer $2 + 1 \neq \frac{7}{3} \cdot 3$

Potenciación y radicación

Operaciones de bastante relevancia usando números reales tienen que ver con raíces y potencias. En general algunas de las propiedades más usadas son:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n} \qquad (a.b)^n = a^n \cdot b^n \qquad 0^0 = in\det. \; matematica$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \qquad a^0 = 1$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Pero la radicación no es distributiva respecto de la suma o resta:

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{a-b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$$

Otra propiedad muy importante que vincula la potenciación con la radicación es:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

También en este párrafo es conveniente recordar la regla de los signos para cada caso:

$$(-)^{par} = (+)$$
$$(+)^{par} = (+)$$
$$(-)^{impar} = (-)$$
$$(+)^{impar} = (+)$$

$$\sqrt[par]{(+)} = (+)$$
$$\sqrt[par]{(-)} = num.imaginario$$
$$\sqrt[impar]{(+)} = (+)$$
$$\sqrt[impar]{(-)} = (-)$$

Veamos los siguientes ejemplos:

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$
$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$
$$\left(3^3\right)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6$$
$$\left(2^{-2}\right)^3 = 2^{-6} = \frac{1}{2^6}$$

$$6^4 = (2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$$
$$\frac{4^3}{4^{-2}} = 4^{3-(-2)} = 4^{3+2} = 4^5$$
$$9^2 \cdot 9^{-3} = 9^{-1} = \frac{1}{9}$$
$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$$
$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$$
$$\sqrt[3]{-8} = -2$$
$$\sqrt{5 \cdot 5} = 5$$
$$\sqrt[4]{-16} = -2i$$
$$\sqrt[4]{16} = 2$$

Símbolos de comparación

Se forman con ellos desigualdades y tienen mucho uso para realizar comparaciones. Básicamente estos símbolos son cuatro: $\succ$mayor; $\prec$menor; $\geq$mayor e igual; $\leq$menor e igual.

Por ej.: $2 \succ 1$ se lee 2 mayor que 1

$\frac{3}{2} \prec \frac{10}{3}$ se lee $\frac{3}{2}$ menor que $\frac{10}{3}$

$3 \geq 3$ se lee 3 mayor e igual que 3

$7 \leq 10$ se lee 7 menor e igual que 10

Más adelante se trabajará con desigualdades y a la hora de transponer términos de un miembro a otro se mencionarán las excepciones correspondientes.

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

En los conceptos de M.C.D. y m.c.m., se utiliza la descomposición de números en sus factores primos. Las definiciones en cada caso son:

<u>M.C.D.:</u> es el producto de los factores primos comunes elevados al mínimo exponente.
<u>m.c.m.:</u> es el producto de los factores primos comunes y no comunes elevados al máximo exponente.

A modo de ejemplo, se pide calcular el M.C.D. y el m.c.m. entre los números: 48, 280 y 720.

48	2	280	2	720	2
24	2	140	2	360	2
12	2	70	2	180	2
6	2	35	5	90	2
3	3	7	7	45	3
1		1		15	3
				5	5
				1	

$$M.C.D. = 2^3 = 8$$

$$m.c.m. = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5040$$

Práctico 1

Obtener el resultado de las siguientes expresiones:

$$1 \rightarrow 3-\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=$$

$R{:}\dfrac{11}{4}$

$$2 \rightarrow -4+\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{5}}{\frac{3}{2}}+\frac{4}{3}=$$

$R{:}-\dfrac{122}{45}$

$$3 \rightarrow 2-\left(\frac{5}{3}+\frac{4}{2+\frac{1}{3}}+3\right)=$$

$R{:}-\dfrac{92}{21}$

$$4 \rightarrow (4-3)^2+\left(\frac{5}{1-\frac{2}{3}}\right)^2+\frac{4}{3}=$$

$R{:}\dfrac{682}{3}$

$$5 \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2+\frac{3}{11}}+\frac{1}{5}}=$$

$R{:}\dfrac{4}{5}$

$$6 \rightarrow 4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right)=$$

$R{:}\dfrac{107}{180}$

$$7 \rightarrow \frac{2}{3} \div \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) =$$

$$R{:}-\frac{13}{6}$$

$$8 \rightarrow -1 - \left\{-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \left[-2 + \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] - \frac{1}{6}\right\} - \frac{1}{3} =$$

$$R{:}-\frac{11}{12}$$

$$9 \rightarrow \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{3}{-\frac{1}{4}}\right)}{2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}\right)} - \frac{1}{3} =$$

$$R{:}-\frac{12}{25}$$

$$10 \rightarrow \left(\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \frac{1}{6}\right)^2 \div \left(-\frac{5}{4}\right) =$$

$$R{:}-\frac{1}{75}$$

$$11 \rightarrow \frac{1 + \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}} \cdot \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{5}}{2 + \frac{1}{3}} - \frac{1}{5 + \frac{1}{9}} \div \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}}{9 + \frac{1}{5}} =$$

$$R{:}\frac{26}{15}$$

$$12 \rightarrow \sqrt[3]{\left(\frac{\frac{15}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{20}} \div \frac{71}{3}\right) \cdot 100 + 43} =$$

$$R{:}7$$

$$13 \to \left(\frac{1 - \dfrac{1}{2 - \dfrac{1}{2}}}{1 + \dfrac{\dfrac{1}{2}}{1 - \dfrac{2}{3}}} \right)^{-2} =$$

$$R: \frac{225}{4}$$

$$14 \to \frac{4 \cdot \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{5}}{4 \cdot \dfrac{11}{10} + \sqrt{\dfrac{4}{25}}} =$$

$$R: 1$$

$$15 \to \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \dfrac{3}{2}}{2 - \dfrac{13}{9}} + \frac{1}{5} \div \frac{\sqrt{\dfrac{16}{5} \div 5}}{5^{-2}} =$$

$$R: -\frac{11}{25}$$

$$16 \to \sqrt[3]{\frac{\dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{6}}{\sqrt[3]{\dfrac{3}{4} - 1 + \dfrac{1}{8}}} \cdot \frac{10}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2} + \dfrac{2}{3}}} =$$

$$R: -3$$

$$17 \to \frac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}}{\dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{2}} - \frac{\dfrac{7}{2}}{\dfrac{7}{4}} =$$

$$R: -3$$

$$18 \to \left(\left(\frac{3}{5} \right)^{2} \right)^{3} \div \left(\frac{3}{5} \right)^{4} =$$

$$R: \frac{9}{25}$$

$19 \rightarrow \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^{2} \cdot \frac{5}{6}} =$

$R: \frac{5}{6}$

$20 \rightarrow \sqrt{\left(\frac{2}{3}-1\right) \cdot \left(1-\frac{2}{3}\right) \cdot (-1)} =$

$R: \frac{1}{3}$

$21 \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{-7} \div \left(\frac{5}{3}\right)^{-5} =$

$R: \frac{9}{25}$

$22 \rightarrow \frac{12}{5} \div \frac{3}{5} - \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{6} - \frac{50}{7} + \frac{3}{14} =$

$R: -3$

$$23 \rightarrow \frac{\left(\frac{7}{5}-\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1-\frac{5}{6}\right)^{-2}}{\sqrt[3]{(-3) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6}} =$$

$R: -\frac{9}{10}$

24 → Un obrero puede hacer un trabajo en 10 días, otro en 9 y un tercero en 5. ¿Qué parte del trabajo pueden hacer los tres juntos en un día?
R:37/90

25 → Una persona gastó 1/5 y luego 2/3 de una suma de dinero. ¿Qué parte del total gastó y que parte le queda?
R:13/15;2/15

26 → Se vendió las 3/4 partes de un lote de mercadería, y luego la cuarta parte del resto. ¿Cuánto queda aún?
R:3/16

27 → Un obrero que debe abrir una zanja de 65 metros de largo, hizo primero los 2/13 de la misma y luego el duplo de lo ya hecho. ¿Qué longitud debe abrir aún?
R:35 metros

28 → ¿Cuántos días hay en los 3/5 de una año de 365 días?
R:219 días

29 → Obtener el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo entre los números:
a) 81 540 162 243
b) 84 189 210 105
R: a) 27 4860
b) 21 3780

30 → Se desean repartir 180 libros, 240 cuadernos y 360 lápices entre cierto número de alumnos, de tal manera que cada uno reciba una cantidad exacta de libros, cuadernos y lápices. ¿Cuál es el mayor número de alumnos que cumplen con lo pedido?
R:60

31 → Dos engranajes giran uno sobre el otro; el primero tiene 48 dientes y da una vuelta cada 4 segundos; el segundo tiene 104 dientes. ¿Cada cuántos segundos pasan por la misma posición?
R:52 seg.

32 → Se quiere fabricar cajones para guardar 1830 latas de aceite y 1170 latas de alcohol de tal manera que cada cajón tenga el mismo número de latas, sin que sobre ninguna y sin mezclar las latas. ¿Cuál es el mayor número posible de latas que pueden ponerse en cada cajón? ¿Qué cantidad de cajones se necesitan?
R:30;100

Verificar las siguientes desigualdades:

$$33 \rightarrow \frac{4\cdot\frac{2}{3}-\frac{5}{2}}{3+\frac{2}{5}-\frac{4}{7}} \prec \frac{2+\frac{5}{7}-\frac{7}{4}}{4-\frac{5}{6}+\frac{7}{8}}$$

$R: si$

$$34 \rightarrow \frac{\sqrt{25}+\frac{8}{4}-2}{\sqrt{100}-3\cdot 4} \leq \frac{2+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2}{5-3}$$

$R: si$

Tema 2

Expresiones algebraicas - Polinomios

Cantidades del tipo:

Ejemplo 1: $2x^2 - 3x + 7$

Ejemplo 2: $2x - \dfrac{3}{y} + 4p^{-2}$

se denominan expresiones algebraicas.

Los bloques de construcción de una expresión algebraica se llaman términos. En el ejemplo 1, se reconocen tres términos: $2x^2$; $-3x$ y 7 . A su vez cada término en general cuenta con una parte numérica y/o literal. En el término $2x^2$, el factor 2 se denomina coeficiente numérico y el factor x^2 se llama parte literal del mismo.

Como se puede observar en ambos ejemplos la parte literal puede estar elevada a exponentes positivos o negativos indistintamente.

Al reemplazar las letras (variables) por valores numéricos, se encuentra el valor numérico de la expresión algebraica.

Luego, los polinomios son casos particulares de las expresiones algebraicas porque sus indeterminadas o variables solo pueden estar elevadas a números naturales o el cero.

Un polinomio de un solo término se denomina ***monomio***, por ejemplo:

$3x^2$

ab^3

Un polinomio de dos términos es un ***binomio***, por ejemplo:

$3x^2 + x$

$ab^2 + 4$

Un polinomio de tres términos se llama ***trinomio***, por ejemplo:

$ax^2 + bx + c$

$3 + 4x - x^2$

En general una expresión que contiene más de un término se la llama simplemente ***polinomio***.

Operaciones con polinomios

Las cuatro operaciones básicas que se pueden realizar con polinomios se enumeran a continuación:

Suma/Resta:

Se suman/restan algebraicamente los términos de ambos polinomios que presentan igual parte literal. Se respetan las reglas de signos vistas en contenidos precedentes. Por ejemplo:

$$S(x) = \left(3x^2 + y - 7\right) + \left(8 - 4y\right) = 3x^2 - 3y + 1$$

Producto:

Se utiliza la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y luego se agrupan los términos de igual parte literal para sumarlos/restarlos.

$$P(x) = \left(3x - 4\right) \cdot \left(6x^2 - 5x + 2\right) = 18x^3 - 15x^2 + 6x - 24x^2 + 20x - 8$$
$$P(x) = 18x^3 - 39x^2 + 26x - 8$$

Cociente:

Conviene en primera instancia aclarar cuáles son los polinomios que participan en una división:

D(x)= es el polinomio dividendo.
d(x)= es el polinomio divisor.
C(x)= es el polinomio cociente.
R(x)= es el polinomio resto.

En la división se procede a ordenar tanto el polinomio dividendo como el polinomio divisor, en potencias decrecientes de una de las variables y se procede de acuerdo al siguiente ejemplo:

Dividir: $3a^2b + 5b^3 + 4ab^2$ por $b^2 + ab$

$$\begin{array}{l|l}
3a^2b + 4ab^2 + 5b^3 & \underline{ab + b^2} \\
\underline{-3a^2b - 3ab^2} & 3a + b \quad Cociente \\
\quad ab^2 + 5b^3 & \\
\quad \underline{-ab^2 - b^3} & \\
\qquad 4b^3 \quad \mathrm{Re}\,sto &
\end{array}$$

Una forma de comprobar si lo realizado es correcto, se procede a usar la prueba de la división, es decir:

$$C \cdot d + R = D$$

¿Se anima a comprobarlo Ud. para el ejemplo dado?

Para los polinomios de una sola variable (por ejemplo "*x*") se puede dividir de la forma que se acaba de ejemplificar o bien usar la:

Regla de Ruffini

Esta regla se puede utilizar, siempre y cuando el polinomio divisor sea de la forma $x \pm a$, donde "*a*" es una constante.

Ej.: dividir el polinomio, $-x^3 + 6x - 3$ por, $x - 2$

Para aplicar Ruffini se construye la siguiente tabla, sin olvidar previamente de ordenar el polinomio dividendo en potencias decrecientes de la variable "*x*" y completar con ceros los términos de coeficientes nulos. Luego se procede de la forma indicada:

	-1	0	6	-3	
2		-2	-4	4	
	-1	-2	2	1	$\longrightarrow$ Resto

"*a*" cambiado de signo

El polinomio cociente es de un grado menor al polinomio dividendo, es decir:

$$C(x) = -x^2 - 2x + 2$$

y el resto es R=1.

Si el polinomio dividendo es en una indeterminada y el divisor es de la forma $x \pm a$, también se puede aplicar el:

Teorema del Resto

El procedimiento para calcular solo el resto a través de este teorema, consiste en evaluar al polinomio dividendo por el valor de "-*a*", es decir por "*a*" cambiado de signo. En fórmula: $R = D(-a)$.

Para el ejemplo anterior:

$$R = -(2)^3 + 6 \cdot (2) - 3$$
$$R = -8 + 12 - 3 = 12 - 11$$
$$R = 1$$

Práctico 2

Obtener el valor numérico de los siguientes polinomios:

$1 \rightarrow 5x^2y + 3xy^2 + 7xy, \quad para: \quad x = 1 \quad y = -1$
$R = -9$

$2 \rightarrow 4xy^3 + 9x^2y - \frac{2}{3}x, \quad para: \quad x = 2 \quad y = \frac{1}{2}$
$R = \frac{53}{3}$

$3 \rightarrow x^2y + \frac{1}{4}zx - \frac{1}{3}zy^2, \quad para: \quad x = 0 \quad y = 1 \quad z = -2$
$R = \frac{2}{3}$

$4 \rightarrow yz - \frac{1}{2}xy + 7x^2z^2, \quad para: \quad x = \frac{1}{2} \quad y = -2 \quad z = \frac{1}{3}$
$R = \frac{1}{36}$

Sumar:

$5 \rightarrow 4xy + 3x^2y - \frac{2}{3}xy^2 \quad con \quad \frac{5}{2}xy^2 + \frac{1}{5}xy - \frac{1}{3}x^2y$
$R = \frac{8}{3}x^2y + \frac{21}{5}xy + \frac{11}{6}xy^2$

$6 \rightarrow 5y^2z + 4xy - 3xz \quad con \quad \frac{1}{2}xy - \frac{3}{5}xz - \frac{1}{8}y^2z$
$R = \frac{39}{8}y^2z + \frac{9}{2}xy - \frac{18}{5}xz$

$7 \rightarrow 4x^2 + 3x - \frac{1}{5} \quad con \quad \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{3}{7}$
$R = \frac{3}{4}x^3 + \frac{15}{4}x^2 + \frac{35}{9}x + \frac{8}{35}$

Multiplicar:

$$8 \rightarrow \left(4xz + 2x + 3z\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}z + 2\right) =$$

$$R = 2x^2z + 3xz^2 + x^2 + 11xz + \frac{9}{4}z^2 + 4x + 6z$$

$$9 \rightarrow \left(5x^2 + 3x + 2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x - 3\right) =$$

$$R = \frac{5}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^2 - 8x - 6$$

$$10 \rightarrow \left(x + 3a\right) \cdot \left(\frac{2}{3}a + \frac{5}{2}x + 2\right) =$$

$$R = \frac{49}{6}xa + \frac{5}{2}x^2 + 2x + 2a^2 + 6a$$

$$11 \rightarrow \left(x + 3\right) \cdot \left(2x^2 - 5x + 7\right) =$$

$$R = 2x^3 + x^2 - 8x + 21$$

$$12 \rightarrow \left(x^2 - 1\right) \cdot \left(x^3 + 2\right) =$$

$$R = x^5 - x^3 + 2x^2 - 2$$

Dividir:

$$13 \rightarrow (6a^4b^2 + 4a^2b^4 + ab^5 + 7a^3b^3) : (2ab^2 + b^3) =$$

$$R = 3a^3 + 2a^2b + ab^2$$

$$14 \rightarrow (4a^3b^2c + 12ab^2c^3 - 18a^4b^4c^4) : (2abc) =$$

$$R = 2a^2b + 6bc^2 - 9a^3b^3c^3$$

$$15 \rightarrow (x^4 - 3x^2 + 1) : (x^2 - 2x + 2) =$$

$$R = x^2 + 2x - 1, \ \ (-6x + 3)$$

$$16 \rightarrow (3x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 5):(x + \frac{1}{5}) =$$

$$R = -\frac{x^2}{3} + \frac{31}{15}x + \frac{194}{75}, \ (\frac{1681}{375})$$

$$17 \rightarrow (4x + 3x^2 - 8):(4x^2 - 1) =$$

$$R = \frac{3}{4}, \ (4x - 29/4)$$

$$18 \rightarrow (4x^2 + 3 - 10x^4):(3x^2 + 4x) =$$

$$R = -\frac{10}{3}x^2 + \frac{40}{9}x - \frac{124}{27}, \ (\frac{496}{27}x + 3)$$

Encontrar el cociente y el resto. Puede aplicarse Ruffini si lo desea.

$$19 \rightarrow (x^2 - 2x + 1):(x + 1) =$$

$$R = x - 3, \ (4)$$

$$20 \rightarrow \left(4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\right):(x - 3) =$$

$$R = 4x^2 + \frac{23}{2}x + \frac{75}{2}, \ (221/2)$$

$$21 \rightarrow (5x + 7x^3 - 13):(x + 1/2) =$$

$$R = 7x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{27}{4}, \ (-131/8)$$

$$22 \rightarrow (2x^4 + 3x - x^2 + 4):(x - 5) =$$

$$R = 2x^3 + 10x^2 + 49x + 248, \ (1244)$$

$$23 \rightarrow (x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x + 39):(x + 3) =$$

$$R = x^3 - 2x + 13$$

Aplicando el teorema del resto, indicar si las divisiones de los ejercicios 19 al 23 son exactas.

$24 \rightarrow$ ¿Cuál es el polinomio que dividido por *2x+3* tiene por cociente $x^2 - 3$ y por resto -37?

$$R = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 46$$

$25 \rightarrow$ Obtener el valor de "m" para que la división siguiente sea exacta. (Utilizar el teorema del resto).

$(2x^4+3x^3-mx-6):(x+2)=$

$R=-1$

$26 \rightarrow$ Calcular el resto de la división de:

$(x-2)^5 \cdot (x-8/3)^3 \, por (x-3)$

$R=1/27$

Determinar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

$27 \rightarrow (4-x+x^2+x^4):(2+x)=$

$R=x^3-2x^2+5x-11, \ (26)$

$28 \rightarrow (1+x^2):(7+11x+x^4)=$

$R=0, \ (1+x^2)$

$29 \rightarrow (p^3+2p^2+p+5):(P+2)=$

$R=p^2+1, \ (3)$

$30 \rightarrow (t^2+1):(t-1)=$

$R=t+1, \ (2)$

Tema 3

Factoreo de polinomios

Introducción

Si el producto de dos enteros "a" y "b" es "c", c=a.b, entonces "a" y "b" se llaman factores de "c".

Esta terminología también se utiliza en expresiones algebraicas. Si dos (o más) expresiones algebraicas se multiplican a la vez, estas expresiones se dice que son *factores* de la expresión que se obtuvo como producto: por ejemplo, la expresión 2xy se obtuvo multiplicando 2,x e y, de modo que 2, x e y son los factores de 2xy.

De manera similar, *x* es un factor de la expresión $2x^2+3x$ puesto que podemos escribir $2x^2+3x=x\cdot(2x+3)$ y x^2 es un factor de $6x^2+9x^3$ dado que podemos escribir $x^2\cdot(6+9x)$. Esto se conoce normalmente con el nombre de *sacar factor común.*

Definición

El proceso de escribir una expresión dada como el producto de sus factores se llama *factorización o factoreo* de la expresión.

Dicho de otra forma, escribir un polinomio dado como un producto de factores, es precisamente una operación de factoreo, por ejemplo: $x^2-x-6=(x+2)\cdot(x-3)$.

La intención de esta sección es poder examinar distintas formas de factoreo de polinomios.

Hasta aquí se ha visto como se puede sacar un factor común de toda una expresión polinómica, por ejemplo: $x^2y+4xz-3x=x\cdot(xy+4z-3)$, pero también se puede sacar factor común por grupo. Veamos el siguiente caso: $ax^2+bx^2+ay^2+by^2=x^2\cdot(a+b)+y^2(a+b)$ y a su vez se vuelve a sacar factor común $(a+b)\cdot(x^2+y^2)$ y este último es el polinomio que resulta de este trabajo algebraico, que de hecho es igual a la expresión original.

Además de estos dos casos planteados hasta este momento, existen otros casos de factoreo que se los llama directos y son:

Cuadrado de binomio

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Diferencia y suma de cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

$$a^2 + b^2 = no \quad se \quad factoriza$$

Cubo de binomio

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Diferencia y suma de cubos

$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$$

Para trinomios cuadrados no perfectos se puede proceder de acuerdo al siguiente ejemplo:

$$x^2 - x - 2 = (x+1)\cdot(x-2)$$

En donde se opera así:

$$\begin{array}{llll} (x & +1) & & -2x \\ (x & -2) & & x \\ \hline x^2 & -2 & & -x \end{array}$$

Se multiplica *x* con *x* y se obtiene x^2 que es el primer término del polinomio a factorear. Se multiplica 1 con -2 y se obtiene -2, que es el último término del polinomio dado. Finalmente, el producto de *x* con -2 sumado al producto de *x* con 1 da -*x* que es el término del medio del polinomio problema. Entonces los paréntesis indican los factores del factoreo realizado, es decir $(x+1)\cdot(x-2)$.

Raíces de un polinomio con una sola variable

Un número α es raíz de un polinomio P(x) si al reemplazar α en la variable "x" del polinomio el mismo se anula, es decir que $P(\alpha) = 0$

Es sabido que un polinomio de una indeterminada tiene tantas raíces como grado tenga este. Esto significa que un polinomio de segundo grado tiene dos raíces, $\alpha_1 \ y \ \alpha_2$.
Por ejemplo:

$$P(x) = x^2 + 3x - 4$$

$$tiene \quad dos \quad raices: \ \alpha_1 = 1 \quad y \quad \alpha_2 = -4$$

ya que:

$$P(\alpha_1) = P(1) = 1^2 + 3.1 - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$$
$$P(\alpha_2) = P(-4) = (-4)^2 + 3.(-4) - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$$

La pregunta es ¿cómo calculamos estas raíces? y ¿para qué sirve calcularlas?

Existen muchas estrategias de cálculo, lo importante es que una vez que las conocemos podríamos armar el polinomio P(x) como:

$$P(x) = a.(x - \alpha_1).(x - \alpha_2)......(x - \alpha_n)$$

Donde "*a*" es el coeficiente de la variable de máximo exponente.

Entonces si los datos son, $a = 2 \quad y \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1$, el polinomio se construye así:

$$P(x) = 2.(x - 1).(x - (-1))$$
$$P(x) = 2.(x - 1).(x + 1)$$
$$P(x) = (2x - 2).(x + 1)$$
$$P(x) = 2x^2 + 2x - 2x - 2$$
$$P(x) = 2x^2 - 2$$

Distintas formas de calcular las raíces de un polinomio de una indeterminada

Si retomamos el ejemplo anterior:

A) *Por inspección o despejando (si se puede)*

Las raíces se calculan de la siguiente manera,

$$P(x) = 2x^2 - 2 = 2.(x^2 - 1)$$

Luego, de acuerdo a la definición de raíz se propone forzar al P(x) a cero,

P(x)=0

Es decir, $2.(x^2 - 1) = 0$, entonces de los dos factores, solo se puede anular $x^2 - 1$ ya que el 2 es una constante, por lo tanto si $x^2 - 1 = 0$ por inspección se ve que,

$\alpha_1 = 1 \;\; y \quad \alpha_2 = -1$ son las raíces del mismo. O sino se puede despejar de la expresión $2.(x^2 - 1) = 0$ la indeterminada "*x*", es decir:

$$(x^2 - 1) = \frac{0}{2}$$
$$x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm\sqrt{1}$$
$$\alpha_1 = 1 \quad y \quad \alpha_2 = -1$$

B) *Por factoreo del polinomio*

El procedimiento consiste en factorear completamente al polinomio,

$$P(x) = 2x^2 - 2 = 2.(x^2 - 1) = 2.(x+1).(x-1)$$

y luego, las raíces son: $\alpha_1 = 1 \quad y \quad \alpha_2 = -1$, que son los valores que reemplazados en *P(x)* lo anulan.

C) *Mediante la inspección de una raíz y luego aplicando Ruffini*

Se prueban distintos valores de "*x*" como: -2, -1, 0, 1, 2, etc., con la intención de que uno de ellos anule el polinomio a factorear, por ejemplo:

$$x = 1, \quad por\ lo\ tanto, \quad P(1) = 2.(1)^2 - 2 = 0, \quad entonces\ verifica!$$

lo que significa que $\alpha_1 = 1$, es raíz. Entonces se puede escribir el polinomio *P(x)* como:

$$P(x) = (x - \alpha_1).Q(x)$$
$$P(x) = (x - 1).Q(x)$$

donde *Q(x)* es un polinomio desconocido, que para calcularlo se despeja de la expresión anterior:

$$Q(x) = \frac{P(x)}{(x-1)} = \frac{2x^2 - 2}{x - 1}$$

y ahora se puede aplicar la Regla de Ruffini:

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 2 & 0 & -2 \\
1 & & 2 & 2 \\
\hline
 & 2 & 2 & 0
\end{array}
$$

El resto es siempre nulo

así, de acá se desprende que, $Q(x) = 2x + 2$, entonces *P(x)* se puede poner como:

$$P(x) = (x-1).(2x+2)$$
$$P(x) = (x-1).2.(x+1)$$
$$P(x) = 2(x-1).(x+1)$$

que es lo mismo que se obtuvo por los otros métodos.

Este método es muy útil porque sirve para polinomios aún de mayor grado que el presentado en el ejemplo. Tiene además la ventaja de ser muy rápido y efectivo. En clase de problemas se ejercitará más sobre esta forma de factoreo.

Por su puesto que a usted podrá proponer otras formas de resolver este tipo de ejercicios y estoy seguro que serán totalmente válidas. Esta presentación simplemente ha sido dada con la intención de generar ciertos criterios para resolver factoreo de polinomios.

Práctico 3

Desarrollar:

$1 \rightarrow (x-2y)^2 =$
$R = x^2 - 4xy + 4y^2$

$2 \rightarrow (2x+4y)^3 =$
$R = 8x^3 + 48x^2y + 96xy^2 + 64y^3$

$3 \rightarrow \left(4ax - \frac{3}{2}by\right)^3 =$

$R = 64a^3x^3 - 72a^2x^2by + 27axb^2y^2 - \frac{27}{8}b^3y^3$

$4 \rightarrow \left(\frac{x}{2} - 3y^2\right)^2 =$

$R = \frac{x^2}{4} - 3xy^2 + 9y^4$

$5 \rightarrow$ Probar si 1, 2, -3 son raíces de $2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x - 22$

$R = no, \quad si, \quad no$

Obtener los polinomios cuyas raíces son:

$6 \rightarrow 1;\ 3;\ 0$
$R = x.(x-1).(x-3)$

$7 \rightarrow -2;\ \frac{1}{2};\ 5$
$R = (x+2).(x-1/2).(x-5)$

$8 \rightarrow 0;\ 1;\ 1;\ 2$
$R = x.(x-1)^2.(x-2)$

Factorear:

$9 \rightarrow -2byx + 12ax^2 - 10bx^2 - 2x =$
$R = 2x.(-bx + 6ax - 5bx - 1)$

$10 \rightarrow 6bx - 4ab + 3xy - 2ay =$
$R = (3x - 2a).(2b + y)$

$11 \rightarrow x^3 - 2x^2 y + 4x - 8y =$
$R = (x - 2y).(x^2 + 4)$

$12 \rightarrow x^4 - 16 =$
$R = (x^2 + 4).(x + 2).(x - 2)$

$13 \rightarrow x^5 - 32 =$
$R = (x - 2).(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$

$14 \rightarrow 8x^3 + 27 =$
$R = (2x + 3).(4x^2 - 6x + 9)$

$15 \rightarrow 2x^2 - 5x + 2 =$
$R = (x - 2).(2x - 1)$

$16 \rightarrow x^3 - 5x^2 + 8x - 4 =$
$R = (x - 1).(x - 2)^2$

$17 \rightarrow 2x^3 - 5x^2 + 2x =$
$R = x.(x - 2).(2x - 1)$

$18 \rightarrow 27x^3 - 1/8 =$
$R = (3x - 1/2).(9x^2 + \frac{3}{2}x + 1/4)$

$19 \rightarrow x^2 + 2x - 15 =$
$R = (x+5).(x-3)$

$20 \rightarrow 2x^2 - x - 1 =$
$R = (2x+1).(x-1)$

$21 \rightarrow x^3 - 8 =$
$R = (x-2).(x^2 + 2x + 4)$

$22 \rightarrow x^2 - 2 =$
$R = (x-\sqrt{2}).(x+\sqrt{2})$

Tema 4

Fracciones algebraicas

Se define a una fracción algebraica como el cociente de dos expresiones que contienen una o más variables, tales como:

$$\frac{x+2}{x-3} \qquad \frac{y^2z+4}{y-z}$$

Para que una expresión algebraica tenga sentido, se dará por hecho que la o las variables no tomen valores que hagan que el denominador de la fracción se anule. Así, por ejemplo, en la fracción de la izquierda, la variable "*x*" debe ser distinta de 3 para que el denominador no se haga cero.

En esta sección, estudiaremos métodos para simplificar estas fracciones algebraicas y examinaremos la adición, sustracción, multiplicación y división de dos o más de tales fracciones.

La factorización (que ya vimos en el Tema 3) jugará un papel muy importante en los próximos ejercicios.

Simplificación

Veamos los siguientes casos:

a) $$\frac{x^2-4}{x^2-2x} = \frac{(x-2).(x+2)}{x.(x-2)} = \frac{(x+2)}{x}$$

b) $$\frac{x^2-6x+9}{x^2-3x} = \frac{(x-3).(x-3)}{x.(x-3)} = \frac{(x-3)}{x}$$

Así los resultados obtenidos en a) y b) son equivalentes a las fracciones originales siempre y cuando $x \neq 0 \quad x \neq 2 \quad x \neq 3$ respectivamente.

Adición

Si los denominadores son iguales, la suma es prácticamente inmediata, por ejemplo:

$$\frac{2x}{4y} + \frac{8z}{4y} = \frac{2x+8z}{4y}$$

En cambio, si la suma de fracciones algebraicas tiene distintos denominadores, encontramos primero su mínimo común denominador y luego se opera algebraicamente:

$$\frac{x}{x-1}+\frac{2x}{x+1}+\frac{x+2}{x^2-1}=\frac{x.(x+1)+2x.(x-1)+(x+2)}{(x-1).(x+1)}=\frac{x^2+x+2x^2-2x+x+2}{(x-1).(x+1)}=\frac{3x^2+2}{x^2-1}$$

Sustracción

Se opera de manera análoga a la suma, por ejemplo:

$$\frac{7.(x+1)}{x^2-x}-\frac{(x+2)}{(x-1)}=\frac{7.(x+1)}{x.(x-1)}-\frac{(x+2)}{(x-1)}=\frac{7.(x+1)-x.(x+2)}{x.(x-1)}=\frac{7x+7-x^2-2x}{x.(x-1)}=\frac{-x^2+5x+7}{x.(x-1)}$$

Si hay sumas y restas al mismo tiempo se opera con igual criterio, respetando los signos. A esto se lo llama *suma algebraica* de fracciones.

Multiplicación

Dos o más fracciones se pueden multiplicar simplemente realizando el producto de los factores del numerador y denominador respectivamente. Es conveniente, no obstante, que en cada caso (si se puede) se factoree el numerador y denominador con la intención de simplificación de factores. Veamos el siguiente ejemplo:

$$\frac{(x^2-1)}{(x^2+2x-3)}\cdot\frac{(x+3)}{2.(x+4)}=\frac{(x+1).(x-1).(x+3)}{(x+3).(x-1).2.(x+4)}=\frac{(x+1)}{2.(x+4)}=\frac{(x+1)}{2x+8}$$

División

Se transforma en un producto multiplicando por la recíproca del denominador. Para el caso:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Veamos el siguiente ejemplo:

$$\frac{3}{x^2-x}\div\frac{2x}{x^2-1}=\frac{3}{x.(x-1)}\cdot\frac{(x^2-1)}{2x}=\frac{3.(x+1).(x-1)}{x.(x-1).2x}=\frac{3.(x+1)}{2x^2}$$

Práctico 4

Simplificar:

$$1 \to \frac{18m^2n^4x^5}{9mnx^2} =$$
$$R = 2mn^3x^3$$

$$2 \to \frac{m^4 - 16}{m^3 - 4m} =$$
$$R = (m^2 + 4) / m$$

$$3 \to \frac{a^3 - ab^2}{a^3 + a^2 + a^2b + ab} =$$
$$R = (a - b) / (a + 1)$$

Efectuar y simplificar si se puede:

$$4 \to \frac{3x - 1}{x^2 - x} + \frac{x - 1}{x} =$$
$$R = \frac{x + 1}{x - 1}$$

$$5 \to \frac{-1}{a - b} + \frac{-3}{a + b} + \frac{-1}{ab} =$$
$$R = \frac{b^2(2a + 1) - a^2(4b + 1)}{ab.(a^2 - b^2)}$$

$$6 \to \frac{-x}{x^3 - 8} + \frac{2}{x^2 - 4} =$$
$$R = \frac{x^2 + 2x + 8}{(x - 2).(x + 2).(x^2 + 2x + 4)}$$

$$7 \to \frac{2x}{x-1} - \frac{3}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} =$$
$$R = \frac{2x^2+4x-5}{x^2-1}$$

$$8 \to \frac{(x^3+8)}{(x+2)} \cdot \frac{(x+1)}{(x^2-2x+4)} \cdot \frac{1}{(x-1)} =$$
$$R = \frac{x+1}{x-1}$$

$$9 \to \frac{x^2-1}{15} \cdot \frac{3}{x^3-x} \cdot \left[\frac{5x^2}{x-1}\right]^2 =$$
$$R = \frac{5x^3}{(x-1)^2}$$

$$10 \to \left[x + \frac{y^2}{x}\right] \cdot \left[\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right] =$$
$$R = \frac{x^4-y^4}{x^2y}$$

$$11 \to \frac{(5-x)}{(x+y)} \cdot \frac{(y+x)}{(x-5)} \cdot \frac{2x}{(x+2)} =$$
$$R = -\frac{2x}{(x+2)}$$

$$12 \to \frac{3a^2b^2}{4xy} : \frac{ab}{xy^2} =$$
$$R = \frac{3}{4}aby$$

$$13 \to \frac{(x+y)^2}{x-y} \div \frac{x+y}{(x-y)^2} =$$
$$R = x^2 - y^2$$

$$14 \rightarrow \frac{x^2}{8+x^3} : \frac{x}{6+x} =$$

$R = x.(6+x)/(x^3+8)$

$$15 \rightarrow \frac{\frac{1}{x} + \frac{x^2}{y^3}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}} =$$

$R = (x+y)/y$

$$16 \rightarrow \frac{3}{x} : \frac{x+1}{2x+1} - \frac{4}{x+1} \cdot \frac{x-1}{x-3} =$$

$$R = \frac{2x^2 - 11x - 9}{x(x+1)(x-3)}$$

$$17 \rightarrow \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x} \right) : \left(\frac{2x+1}{x^2+x} \right) =$$

$R = -1$

$$18 \rightarrow \frac{x^2+8x+16}{x^2+x-12} =$$

$R = (x+4)/(x-3)$

$$19 \rightarrow \frac{x^3-8}{x^2-4} =$$

$R = (x^2+2x+4)/(x+2)$

$$20 \rightarrow \frac{x^2+3x-10}{x^2+6x+5} =$$

$R = (x-2)/(x+1)$

$$21 \rightarrow \frac{x^2-x-2}{2x^2-5x+2} =$$

$R = (x+1)/(2x-1)$

Tema 5

Radicales

Algún comentario ya hemos hecho respecto de estas operaciones en el Tema 1. No obstante nos quedan por ver otras operaciones importantes con raíces, como, por ejemplo:

Extracción de factores fuera del radical

Si un factor figura en el radicando, con un exponente mayor que el índice de la raíz, puede extraerse fuera del radical. El exponente con que sale es el cociente de la división entre el exponente y el índice, y el exponente que queda dentro del radical es el resto de esa división. Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{24x^5y^4pz^8} = \sqrt[3]{2^3.3.x^5y^4pz^8} = 2xyz^2.\sqrt[3]{3x^2ypz^2}$$

Suma de radicales

Para que sea viable, los radicales a sumar deben tener igual índice y radicando, es decir que deben ser semejantes. Por ejemplo:

$$2\sqrt{3a} - 4\sqrt{3a} + 7\sqrt{3a} = 5\sqrt{3a}$$

Producto de radicales

Se puede realizar reduciendo a las raíces que participan del producto a un índice común. Por ejemplo:

$$2.\sqrt[3]{a^2b}.\sqrt{abc} = 2.\sqrt[3x2]{a^{2x2}b^{1x2}}.\sqrt[2x3]{a^{1x3}b^{1x3}c^{1x3}} = 2.\sqrt[6]{a^4b^2}\sqrt[6]{a^3b^3c^3} = 2.\sqrt[6]{a^4b^2a^3b^3c^3}$$
$$= 2.\sqrt[6]{a^7b^5c^3} = 2.a.\sqrt[6]{ab^5c^3}$$

Cociente de radicales

Se procede de manera equivalente al producto. Veamos el siguiente ejemplo:

$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt[5]{b}} = \frac{\sqrt[10]{a^5b^5}}{\sqrt[10]{b^2}} = \sqrt[10]{\frac{a^5b^5}{b^2}} = \sqrt[10]{a^5b^3}$$

Racionalización de denominadores

La racionalización de denominadores implica eliminar las raíces del denominador de una fracción, obteniendo nueva expresión algebraica equivalente a la dada.

Existen varios casos de racionalización de denominadores, pero solo estudiaremos dos:

a) Cuando el denominador está formado por un único radical, por ejemplo:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$$

En este caso se procede de la siguiente manera:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2}}=\frac{4}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{4.\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2.2^3}}=\frac{4.\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{4.\sqrt[3]{4}}{2}=2.\sqrt[3]{4}$$

b) Cuando el denominador es un binomio con uno o sus dos términos irracionales cuadráticos,

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}= \qquad\qquad \frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=$$

En estos casos se procede a multiplicar y dividir a la expresión dada por el conjugado del denominador, que es el mismo denominador cambiado de signo y se usa luego el concepto de diferencia de cuadrados: $a^2-b^2=(a+b).(a-b)$

Para el primer ejemplo:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)}\cdot\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)}{1^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1-\sqrt{2}}{1-2}=\frac{1-\sqrt{2}}{-1}=-1+\sqrt{2}$$

Para el segundo ejemplo:

$$\frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{2}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=\frac{2.\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}=\frac{2.\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x-y}$$

Por ahora este tipo de cálculo no parece tener demasiado sentido, pero usted verá que en el primer nivel de Cálculo en Ingeniería (Análisis Matemático I), a la hora de resolver límites, servirá para levantar indeterminaciones matemáticas.

Práctico 5

Resolver:

$$1 \rightarrow \sqrt{64^{\frac{1}{3}}} =$$
$$R = 2$$

$$2 \rightarrow \sqrt[3]{125.x^{12}y^{3}} =$$
$$R = 5x^{4}y$$

$$3 \rightarrow \sqrt{135} =$$
$$R = 3.\sqrt{15}$$

$$4 \rightarrow \sqrt{4.x^{2}y^{4}z} =$$
$$R = 2xy^{2}\sqrt{z}$$

$$5 \rightarrow \sqrt{\frac{20}{9}am^{18}x^{2}} =$$
$$R = (2m^{9}x.\sqrt{5a})/3$$

$$6 \rightarrow 2\sqrt{50} - 3\sqrt{18} + 2\sqrt{2} =$$
$$R = 3.\sqrt{2}$$

$$7 \rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{72} =$$
$$R = 0$$

$$8 \rightarrow \sqrt{15n} - \sqrt{60n} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{4}n} =$$
$$R = -\frac{5.\sqrt{15n}}{4}$$

$$9 \rightarrow \sqrt[5]{(a-x)^{3}} \cdot \sqrt[10]{(a+x)} \cdot \sqrt{(a-x)} =$$
$$R = (a-x) \cdot \sqrt[10]{(a^{2}-x^{2})}$$

$$10 \rightarrow \sqrt{a^4x^2 - a^4y^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{x-y}} =$$

$$R = a^2 . \sqrt{(x+y)}$$

$$11 \rightarrow \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} =$$

$$R = 3.\sqrt[6]{a}$$

$$12 \rightarrow \sqrt{(3+3\sqrt{10})} \cdot \sqrt{(-3+3\sqrt{10})} =$$

$$R = 9$$

$$13 \rightarrow \frac{5.\sqrt{(x^2+4x+4)} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x+2)} + \frac{1}{5} \cdot \sqrt{25x+50} - \frac{3}{4}\sqrt{(4x+8)}}{\sqrt{(x+2)}} =$$

$$R = 5.\sqrt{(x+2)} - 1$$

Racionalizar:

$$14 \rightarrow \frac{2.\sqrt{6}}{\sqrt{3}} =$$

$$R = 2.\sqrt{2}$$

$$15 \rightarrow \frac{-3}{\sqrt{a^5b^6c^2}} =$$

$$R = \frac{-3.\sqrt{a}}{a^3b^3c}$$

$$16 \rightarrow \frac{5-\sqrt{8}}{\sqrt{2}-5} =$$

$$R = \frac{5\sqrt{2}-21}{23}$$

$$17 \rightarrow \frac{2}{\sqrt{7x} + \sqrt{5x}} =$$

$$R = \frac{\sqrt{7x} - \sqrt{5x}}{x}$$

$$18 \rightarrow \frac{2n}{\sqrt{m+n} - \sqrt{m-n}} =$$

$$R = \sqrt{m+n} + \sqrt{m-n}$$

$$19 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} =$$

$$R = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$$

$$20 \rightarrow \frac{5}{2\sqrt{2} - \sqrt{3}} =$$

$$R = 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$21 \rightarrow \frac{2b^2 . \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 - b^2}} - \sqrt{a^4 - b^4} =$$

$$R = a^2 + b^2$$

$$22 \rightarrow \frac{2x^2 . \sqrt{3 + x^2}}{\sqrt{3 + x^2} - \sqrt{3 - x^2}} - (3 + x^2) =$$

$$R = \sqrt{9 - x^4}$$

Tema 6

Ecuaciones de primer y segundo grado

Lo primera intención es diferenciar lo que se entiende por identidad y ecuación:

Identidad

Es toda igualdad entre dos expresiones algebraicas que *se satisface para cualquier valor de la variable*, por ejemplo:

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

Cualquiera sea el valor que adopte "*x*" ocurre siempre que el primer miembro será igual al segundo miembro. Intente comprobarlo por ejemplo para: *x=1; x=-2*; etc.

Otro ejemplo al cual usted ya está familiarizado es:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

¿Qué le parece si alfa es 45º, 60º, etc.? ¿Se verifica?

Ecuación

Es una igualdad que involucra a dos expresiones algebraicas *que se satisface solamente para uno o algunos valores de las variables,* por ejemplo:

$$x - 3 = -2x + 1$$

En este caso se verifica para *x*=4/3, pero no para otro valor.

Los valores que hacen cumplir o verificar a este tipo de igualdades se denominan *raíz* o *solución* de la ecuación.

Ecuación de primer grado con una incógnita

Es toda expresión algebraica en la cual figura una sola incógnita y su mayor potencia es la primera. La solución se obtiene *despejando* la incógnita siguiendo las reglas ya conocidas de transposición de términos vistas en el Tema 1. Veamos el siguiente caso:

$$5x + 2 = 7x - 3$$

$$5x - 7x = -3 - 2$$

$$-2x = -5$$

$$x = \frac{-5}{-2}$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Su verificación se realiza reemplazando el valor calculado en la ecuación dada:

$$5 \cdot \frac{5}{2} + 2 = 7 \cdot \frac{5}{2} - 3$$

$$\frac{29}{2} = \frac{29}{2} \quad verifica!$$

Este es el caso en que la ecuación es *compatible* con *una* sola solución.

Pueden además presentarse otras situaciones especiales, como, por ejemplo:

$$3.(x+2) - 3 = 3.(x+1)$$

$$3x + 6 - 3 = 3x + 3$$

$$3x + 3 = 3x + 3$$

$$0 = 0$$

En realidad, esto se comporta como una identidad, ya que se verifica para cualquier valor de la variable. Esto en matemática se conoce con el nombre de *compatibilidad* pero con *muchas* “o infinitas” soluciones posibles.

Veamos este otro caso:

$$4.(x-1) - 3 = 2.(2x+5)$$

$$4x - 4 - 3 = 4x + 10$$

$$4x - 7 = 4x + 10$$

$$-7 = 10 \quad ?$$

Es imposible hallar una solución porque nos da un absurdo matemático. Esto recibe el nombre de *incompatibilidad*.

Muchas veces nos ocurre esto como ingenieros, ya que, al modelizar una determinada situación problemática, se pueden plantear ecuaciones que finalmente no admiten solución.

Puede ocurrir que, leyendo cualquier bibliografía de matemática, encuentre también que una ecuación de primer grado adopta la forma:

ax+b=0 donde: *a* y *b* son constantes; con "*a*" distinto de cero
x es la variable o incógnita.

Relación de primer grado con dos incógnitas (función lineal o ecuación de la recta)

Es el caso de una igualdad entre dos expresiones algebraicas de primer grado con dos incógnitas, una de ellas "*y*" queda determinada cuando se conoce la otra "*x*".

A "*x*" se la llama *variable independiente*, en tanto que a "*y*" *variable dependiente*, ya que depende del valor que adopta "*x*". Por ejemplo:

$$-\frac{1}{2}x + y = -1$$

Normalmente lo que se hace es despejar la variable "*y*" en términos de "*x*", o sea:

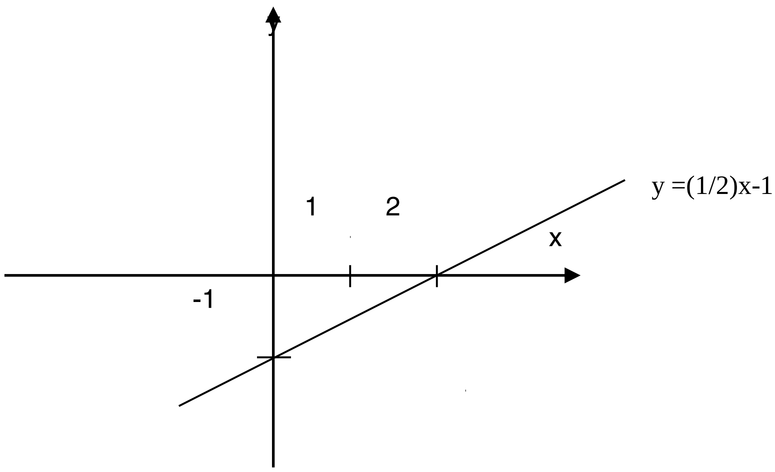
$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

Luego lo que se obtiene es *una recta* en un plano coordenado y para graficarla existen distintos caminos:

a) Una forma es construir una tabla, dando valores a "x" que uno desee y obteniendo valores de "y" correspondientes que satisfacen la ecuación. Para el ejemplo dado:

x	y
0	-1
2	0
4	1
-2	-2

Estos pares ordenados se grafican y se obtiene la recta.



Como puede observarse cada uno de estos pares ordenados son los que satisfacen la ecuación dada.

b) Otra forma es analizando la pendiente y la ordenada al origen de la recta dada, donde la pendiente es m=1/2 y la ordenada al origen es n=-1. A esto lo veremos más detalladamente en clase de problemas

Ecuación de segundo grado con una incógnita

Adopta la forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde: *a*, *b* y *c* son constantes con "*a*" distinto de cero.
x es la variable o indeterminada.

En realidad, una ecuación de segundo grado es un polinomio de segundo grado de una sola variable igualado a cero, por lo tanto admite dos soluciones (o raíces) posibles:

$x_1 \quad y \quad x_2$ que antes denominamos $\propto_1$ y $\propto_2$

que satisfacen dicha ecuación.

Para obtener los valores de $x_1 \; y \; x_2$, se utiliza la fórmula:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que se demuestra por el método de completar cuadrados (que no lo veremos en esta oportunidad) y se llama *fórmula de la resolvente*.

Además, de acuerdo a lo visto en el Tema 2, a la ecuación de segundo grado la podríamos escribir como:

$$ax^2 + bx + c = a.(x - x_1).(x - x_2) = 0$$

En donde se puede verificar fácilmente que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad y \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Todas estas expresiones serán de suma utilidad a la hora de resolver los ejercicios que se propongan en el Práctico 6.

Veamos un ejemplo donde apliquemos todos estos conceptos. Resolver la siguiente ecuación de segundo grado:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

- primero, rescatamos los coeficientes de la ecuación,

a=1, b=2 y c=-3

- segundo, reemplazamos estos coeficientes en la fórmula de la resolvente y calculamos,

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.(1).(-3)}}{2.(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \qquad y \qquad x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$$

- tercero, podríamos verificar si los valores calculados son correctos:

para, $x_1 = 1$ $\quad (1)^2 + 2.1 - 3 = 0$ verifica!

para, $x_2 = -3$ $\quad (-3)^2 + 2.(-3) - 3 = 0$ verifica!

Entonces se calculó correctamente cada una de las soluciones.

Usando como dato: $a = 1,\ \ x_1 = 1\ \ y\ \ x_2 = -3$ podríamos hacer el proceso inverso con la intención de armar la ecuación de segundo grado,

$$a.(x - x_1).(x - x_2) = 1.(x-1).(x-(-3)) = (x-1).(x+3) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3 = 0$$

Además, se puede plantear por otro camino, que siendo los datos los mismos que en el párrafo anterior, la ecuación se arme así,

$$(x_1 + x_2) = -\frac{b}{a} \qquad osea \qquad x_1 + x_2 = -\frac{2}{1}$$

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a} \qquad es\ \ decir \qquad x_1.x_2 = \frac{-3}{1}$$

de donde se deduce que, *a=1, b=2 y c=-3* y la ecuación queda:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

¿Se entienden estos cálculos?

Quizás vale hacer una aclaración más respecto de las soluciones de una ecuación de segundo grado. Muchas veces, por el solo hecho de analizar la expresión que está dentro de la raíz cuadrada de la fórmula de la resolvente - que se llama *discriminante* -, se puede saber si:

1. La ecuación de segundo grado tiene dos raíces reales y distintas.
2. La ecuación de segundo grado tiene dos raíces reales e iguales.
3. La ecuación de segundo grado tiene dos raíces complejas conjugadas.

Si llamamos al discriminante, $\delta = b^2 - 4.a.c$ y ocurre que:

- $\delta \succ 0$ (o sea, positivo), se corresponde con lo explicado en el punto 1.
- $\delta = 0$ (nulo), sucede lo visto en el punto 2.
- $\delta \prec 0$ (o sea, negativo), pasa lo explicado en el punto 3.

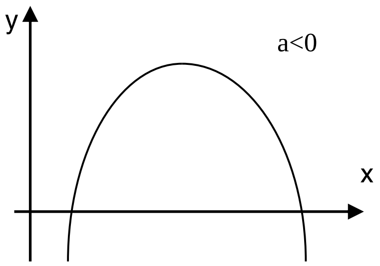
Seguramente estará de acuerdo con esta explicación, de todos modos, esto también se justificará a través de un práctico correspondiente.

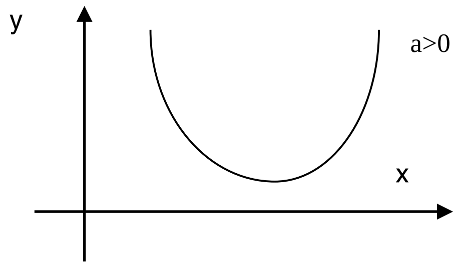
Relación de segundo grado con dos incógnitas (función cuadrática)

Adopta la forma: $y = a.x^2 + b.x + c$ y se obtiene una curva en el plano coordenado que recibe el nombre de parábola.

Para graficarla se deben tener en cuenta los siguientes aspectos:

1. *Ramas de la parábola*: si $a \succ 0$ es hacia arriba (la parábola presenta un mínimo).
si $a \prec 0$ es hacia abajo (la parábola presenta un máximo).



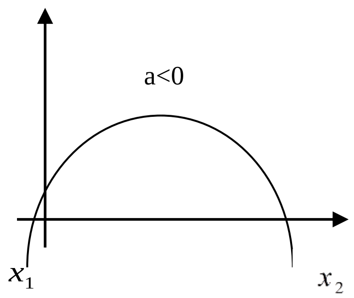


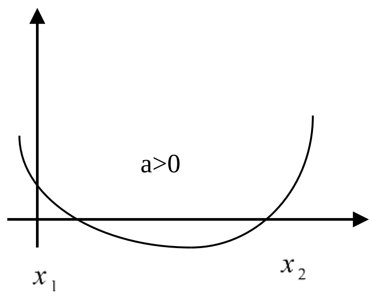
2. *Ordenada al origen:* es el lugar donde la parábola corta al eje "*y*" y se obtiene haciendo *x=0*, lo que significa que el valor que se obtiene es "*c*".

$$y(0) = a.(0)^2 + b.(0) + c = c$$

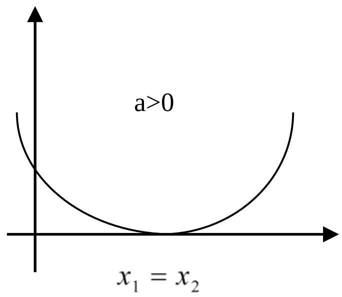
3. *Ceros de función:* es el lugar donde la gráfica corta (no en todos los casos los hace) al eje "*x*". Para obtener dichos valores, se hace *y=0* y se obtiene una ecuación de segundo grado de la forma, $a.x^2 + b.x + c = 0$, donde si la solución es:

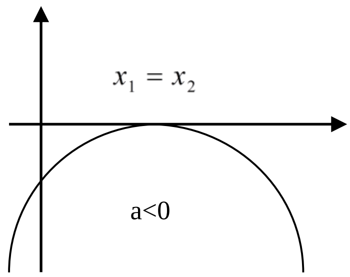
a) $x_1 \neq x_2$ la parábola corta en dos puntos al eje "*x*".



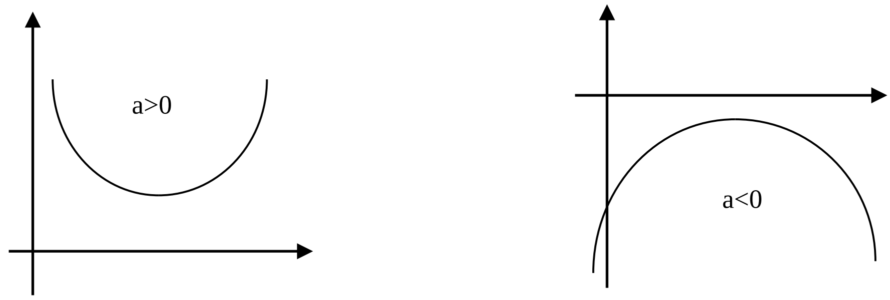


_) $x_1 = x_2$ la parábola toca al eje "*x*".





b) x_1 y x_2 complejas conjugadas, la parábola no taca, ni corta al eje "*x*".



4. *Coordenadas del vértice:* como toda parábola tiene vértice (un máximo o un mínimo), ésta tiene coordenadas, $(x_v ; y_v)$ que se calculan:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad o \quad x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_v = a.(x_v)^2 + b.x_v + c$$

Con todos estos elementos calculados estamos en condiciones de esbozar la gráfica correspondiente.

Veamos este ejemplo: $y = -x^2 + 2x + 8$ de donde rescatamos: *a=-1, b=2* y *c=8*

1. *Ramas de la parábola: a<0* por lo tanto la parábola es de ramas hacia abajo.

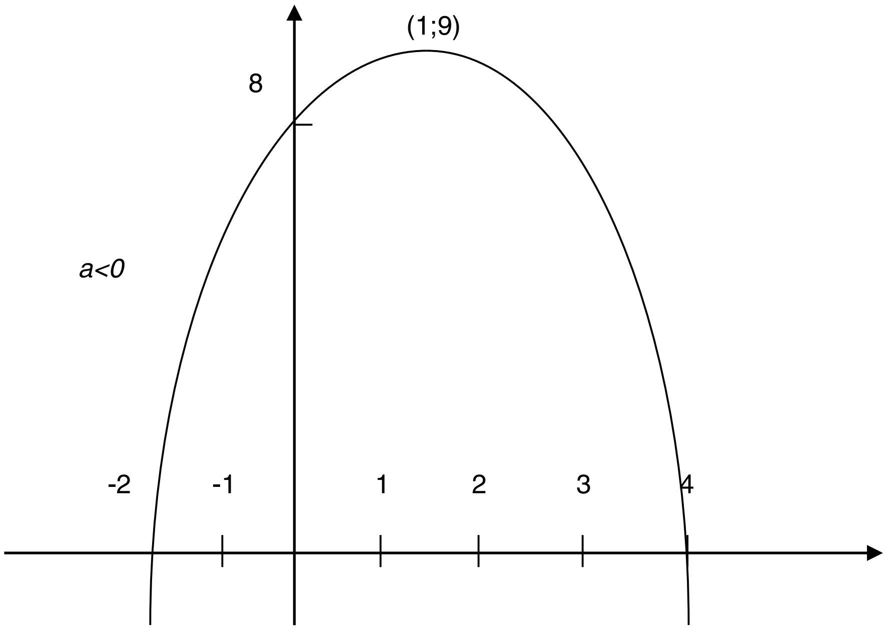
2. *Ordenada al origen:* $y(0) = -1.(0)^2 + 2 \cdot 0 + 8 \;\; es decir \;\; y(0) = 8 = c$

3. *Ceros de función:* calculando de acuerdo a lo que sabemos, $x_1 = -2 \quad y \quad x_2 = 4$

4. *Coordenadas del vértice:* $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2.(-1)} = 1 \qquad y_v = -(1)^2 + 2 \cdot 1 + 8 = 9$

por lo tanto, hay un máximo en: (1;9)

Gráfica



Práctico 6

Resolver la incógnita "*x*" de las siguientes expresiones y problemas:

$$1 \rightarrow \frac{(5+x)}{2} \cdot 3 - 4 = 7$$
$$R = 7/3$$

$$2 \rightarrow \left[\left(3 + \frac{x}{2} - \frac{1}{5}\right) \div 3\right] \div \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{5} = 22$$
$$R = 53/2$$

$$3 \rightarrow \left[\left(3 + \frac{1}{3}\right) \div \left(2 - \frac{1}{x}\right)\right] + \frac{3}{8} = -5$$
$$R = 129/338$$

$$4 \rightarrow \frac{x-4}{4} = \frac{5}{2}$$
$$R = 14$$

$$5 \rightarrow \frac{(x-4)}{3} = \frac{(x-6)}{4}$$
$$R = -2$$

$$6 \rightarrow (x+2)^2 - (x+2) \cdot (x-2) = 16 + 6x$$
$$R = -4$$

$$7 \rightarrow x \cdot (x+1) = 2 + (x-1) \cdot x$$
$$R = 1$$

$8 \rightarrow$ Se desea cortar un alambre de 18 metros de longitud en dos pedazos, tal que uno de ellos tenga una longitud que sea el triple de la del otro. ¿Cuáles son las longitudes de los alambres?
R=13,5 (metros) y 4,5 (metros)

$9 \rightarrow$ La suma del sucesivo de un número natural con el que lo precede es igual al duplo del mismo. ¿Cuál es el número?
R= cualquier número natural

$10 \rightarrow$ Un librero dice: Vendí un libro, un cuaderno y un lápiz por \$54. Por el cuaderno le pagaron el doble del valor del lápiz; por el libro 12 veces lo que le pagaron por el cuaderno. ¿Cuánto cobró por cada artículo?
R= lápiz \$2, cuaderno \$4 y libro \$48.

$11 \rightarrow$ El triplo de un número, menos dos, es igual al duplo del mismo número, más cinco. ¿Cuál es el número?
R= 7

$12 \rightarrow$ Una botella y su tapa cuesta \$6 y la botella cuesta \$5 más que la tapa. ¿Cuál es el precio de la botella y de su tapa?
R= tapa \$1 y botella \$5.

$13 \rightarrow$ Si del total de páginas de un libro dedico 1/15 para reproducir fotografías y dibujos y quedan 434 hojas. ¿Cuántas páginas tendrá el libro?
R= $x - \frac{1}{15}x = 868 \; osea \; x = 930 \, paginas$

Graficar las siguientes rectas:

$14 \rightarrow y = 2x - 3$
$R = corta \; en \; x = 3/2 \; e \; y = -3$

$15 \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$
$R = corta \; en \; x = 8 \; e = 4$

$16 \rightarrow 2x - 4y = 1$
$R = corta \; en \; x = 1/2 \; e \; y = -1/4$

$17 \rightarrow 4y - 3x = 2$
$R = corta \; en \; x = -2/3 \; e \; y = 1/2$

$18 \rightarrow 3x + y = 0$
$R = corta \; en \; x = 0 \; e \; y = 0$

$19 \rightarrow x = 4y + 3$
$R = corta \; en \; x = 3 \; e \; y = -3/4$

Encontrar las raíces de las siguientes ecuaciones de segundo grado:

$20 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0$
$R = \quad x_1 = 2 \ y \ x_2 = -2$

$21 \rightarrow 25x^2 - 81 = 0$
$R = \quad x_1 = 9/5 \ y \ x_2 = -9/5$

$22 \rightarrow (2x + 1) \cdot (x - 1/2) = 0$
$R = \quad x_1 = 1/2 \ y \ x_2 = -1/2$

$23 \rightarrow 2x + 3 = \dfrac{7x}{x+2}$
$R = \quad ninguna \ real$

$24 \rightarrow \dfrac{2.(x-3)}{x} = \dfrac{5x-2}{x+2}$
$R = \quad ninguna \ real$

$25 \rightarrow (x+1).(x-3) = -3$
$R = \quad x_2 = 2 \ y \ x_2 = 0$

$26 \rightarrow x.(x-3) = 2x^2 + 2$
$R = \quad x_1 = -2 \ y \ x_2 = -1$

$27 \rightarrow x.(x+3) = 5x$
$R = \quad x_1 = 2 \ y \ x_2 = 0$

$28 \rightarrow 2x.(7x+5) + 10 = 3x.(5x+9) - 8$
$R = \quad x_1 = 1 \ y \ x_2 = -18$

$29 \rightarrow x.(3x+1) - 1/4 = 0$
$R = \quad x_1 = 1/6 \ y \ x_2 = -1/2$

$30 \rightarrow 3.(x^2 + 4) = 2x - 1/3$
$R = ninguna \ real$

Encontrar las ecuaciones de segundo grado con las condiciones:

$31 \rightarrow x_1 = 2 y x_2 = 3$
$R = x^2 - 5x + 6$

$32 \rightarrow x_1 = 5, x_2 = 7 y \ c = 70$
$R = 2x^2 - 24x + 70$

$33 \rightarrow x_1 = x_2 = 2$
$R = x^2 - 4x + 4$

$34 \rightarrow x_1 + x_2 = 3 \quad y \quad x_1 . x_2 = 7$
$R = x^2 - 3x + 7$

Graficar las siguientes parábolas:

$35 \rightarrow y = 2x^2 - 6x - 8$

$36 \rightarrow y = x^2 - 1$

$37 \rightarrow y = -x^2 - x + 2$

Nota: La solución de estos tres últimos ejercicios se verán en clase de práctico.

Tema 7

Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es un par de ecuaciones de primer grado con dos variables y con raíces comunes. Se presenta bajo la forma,

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \quad (1)$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2 \quad (2)$$

La/s solución/nes son los valores de (x;y) que satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones.

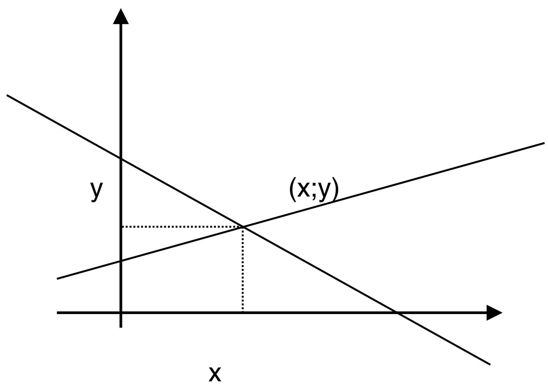
Los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican en:

1. Compatibles: con una o infinitas soluciones.
2. Incompatibles: sin solución.

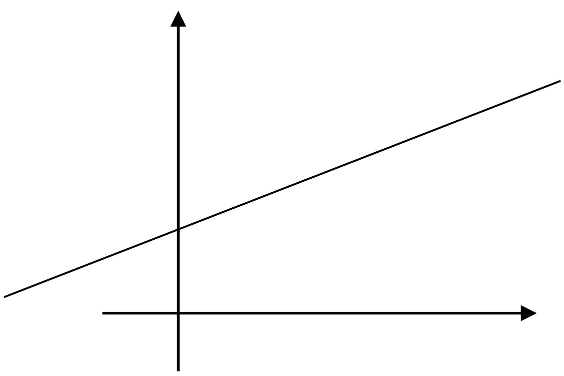
Gráficamente

Esto se interpreta de la siguiente manera,

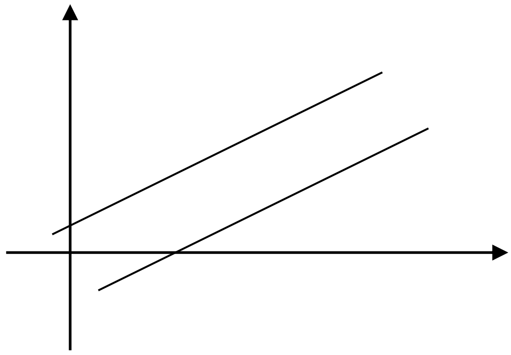
- El sistema con "una solución" corresponde a dos rectas que se cortan en un punto. El punto de corte es precisamente la solución del sistema.



- El sistema con "infinitas soluciones" corresponde a dos rectas superpuestas. Por lo tanto todos los puntos sobre las rectas (que son infinitos) son solución del sistema.



- El sistema "sin solución" corresponde a dos rectas paralelas. Por lo tanto, al no cortarse nunca no aportan soluciones al sistema de ecuaciones planteado.



Analíticamente

Veremos cuatro métodos de resolución distintos,

- *Método de igualación:* Se despeja la misma incógnita de ambas ecuaciones. Se igualan los segundos miembros de estas ecuaciones. Se resuelve esta ecuación de primer grado con una incógnita. Calculado el valor de una incógnita, volvemos a cualquiera de las dos ecuaciones donde está despejada la primera incógnita y obtenemos por sustitución la incógnita que falta. Por ejemplo,

$$x + 6y = 1 \qquad (1)$$
$$2x - 6y = -7 \quad (2)$$

$$de\ (1)\ y\ (2)\ despejo\ "x"$$

$$x = 1 - 6y \quad (3)$$
$$x = \frac{-7 + 6y}{2} (4)$$

$$hacemos \quad (3) = (4)$$

$$1 - 6y = \frac{-7 + 6y}{2}$$

$$resolvemos\ y\ queda,$$

$y = 1/2$

$reeplazando\ y = 1/2\ en\ (3)$

$x = 1 - 6.(1/2) = -2$

$por\ lo\ tanto\ la\ solucion\ es:$
$(-2;1/2)$

- *Método de sustitución:* Se despeja de una de las ecuaciones una de las incógnitas y se sustituye o reemplaza en la otra ecuación. El resto de los cálculos se observan en el siguiente ejemplo,

$5x + y = 8 \quad (1)$
$4x - 2y = -2 \quad (2)$

$de\ (1)\ despemos\ y,$

$y = 8 - 5x \quad (3)$

$reemplazamos\ (3)\ en\ (2),$

$4x - 2 \cdot (8 - 5x) = -2$

$resolviendo$

$x = 1$

$volviendo\ con\ x = 1\ en\ (3)$

$y = 8 - 5 \cdot 1 = 3$

$entonces\ la\ solucion\ es:$
$(1;3)$

- *Método de reducción por adición o sustracción:* Este método consiste en multiplicar a ambos miembros de cada ecuación por números convenientemente elegidos de tal manera que en las ecuaciones resultantes los coeficientes de los términos de igual incógnita sean los mismos (o a lo sumo de distintos signos). Luego estas nuevas ecuaciones se suman o restan (dependiendo del signo) con la intención de eliminar una de las incógnitas. La otra incógnita puede encontrarse de manera análoga o por sustitución. Veamos el siguiente ejemplo,

$$2x - 4y = 10 \quad (1)$$
$$3x + 6y = -9 \quad (2)$$

a la primera ecuación la multiplicamos por tres y a la segunda por dos en ambos miembros, respectivamente,

$$6x - 12y = \quad 30$$
$$6x + 12y = -18$$

restando miembro a miembro queda,

$$-24y = 48$$

por lo tanto,

$$y = -2$$

luego,

$$2x - 4 \cdot (-2) = 10$$

$$2x = 10 - 8$$

$$x = 1$$

entonces la solución es,
(1;-2)

- *Método de determinantes (Regla de Cramer):* Dado el sistema,

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

Un determinante de segundo grado se indica y se calcula así,

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1.b_2 - a_2.b_1$$

y se denomina *"determinante principal"*, el cual debe ser distinto de cero para que el sistema tenga solución.

Se definen los "*determinantes secundarios*" con el mismo criterio, solo que se reemplazan los coeficientes de *la primera columna* por los términos independientes para δ_x y los coeficientes de *la segunda columna* por los términos independientes para δ_y, es decir,

$$\delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1.b_2 - c_2.b_1$$

$$\delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1.c_2 - a_2.c_1$$

Entonces la solución del sistema es:

$$x = \frac{\delta_x}{\delta}$$

$$y = \frac{\delta_y}{\delta}$$

Si el determinante principal es cero, puede ocurrir dos cosas:

1. si $\delta_x \neq 0$ y $\delta_y \neq 0$, el sistema es incompatible (rectas paralelas)
2. si $\delta_x = \delta_y = 0$, el sistema es compatible con infinitas soluciones (rectas superpuestas)

Veamos el siguiente ejemplo,

$$2x - 4y = 10$$
$$3x + 6y = -9$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 24 \qquad \delta_x = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ -9 & 6 \end{vmatrix} = 24 \qquad \delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = -48$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{\delta_x}{\delta} = \frac{24}{24} = 1 \qquad e \qquad y = \frac{\delta_y}{\delta} = \frac{-48}{24} = -2$$

Para cualquiera de estos métodos analíticos vistos, se deberá tener en cuenta que:

$0 \cdot x = 0 \Rightarrow sist.\ con\ \inf initas\ sol.$

$0 \cdot x = 4 \Rightarrow sist.\ sin\ sol.$

Inecuaciones

Corresponde a dos expresiones algebraicas vinculadas por un símbolo de desigualdad. Las que poseen una sola variable elevada a la potencia uno, se las denomina lineales.

La forma de proceder para resolverlas es despejando la variable "*x*" de acuerdo a lo explicado para ecuaciones, salvo en las excepciones siguientes:

1. Al pasar un factor o divisor negativo de una miembro a otro, debe invertirse el símbolo de la desigualdad, por ejemplo:

$$x + 4 \geq 3x + 8$$
$$x - 3x \geq 8 - 4$$
$$-2 \cdot x \geq 4$$
$$x \leq \frac{4}{-2}$$
$$x \leq -2$$

2. Al multiplicar por (-1) en ambos miembros de una desigualdad, se invierte el símbolo de ésta, por ejemplo, si retomamos parte del cálculo anterior:

$$-2 \cdot x \geq 4$$
$$(-1) \cdot (-2x) \leq (-1) \cdot (4)$$
$$2x \leq -4$$
$$x \leq \frac{-4}{2}$$
$$x \leq -2$$

3. Al elevar a la menos uno en ambos miembros de la desigualdad, se invierte el símbolo de ella, por ejemplo:

- si $3 \succ 2$, al elevar a la menos uno en ambos miembros queda,

$$(3)^{-1} \prec (2)^{-1}$$

es decir,

$$\frac{1}{3} \prec \frac{1}{2}$$

lo cual se verifica!

 para el caso, $\frac{1}{x} \prec \frac{3}{2}$, al elevar a la menos uno en ambos miembros queda,

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{-1} \succ \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

queda,

$$x \succ \frac{2}{3}$$

que es la solución!

Práctico 7

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales de primer grado con dos incógnitas en forma analítica practicando los distintos métodos. Graficar algunos.

$1 \to x = 2y + 16$

$x = -y - 5$

$R, (2; -7)$

$2 \to 5x - 4y = 1$

$2x + 4y = -2$

$R, (-1/7; -3/7)$

$3 \to x/3 + y/2 = 14$

$x/3 - y/4 = -1$

$R, (12; 20)$

$4 \to 5x - 2y = -11$

$4x + 3y = -16$

$R, (-65/23; -36/23)$

$5 \to (1/3)x + (2/3)y = 8$

$(1/6)x - (5/6)y = -3$

$R, (12; 6)$

$6 \to 2x + 4y = 14$

$x + 2y = 7$

R, infinitas soluciones

$7 \to x + 3y = 8$

$x/3 + y = 9$

R, sin solucion

$8 \to 3x + y = 2$

$2x - y = 3$

$R, (1; -1)$

$9 \to 2y = -6x + 8$

$3x - 2 = y$

$R, (1;1)$

$10 \to$ Un camión puede llevar 16 cajones de mercaderías A y 4 de las B. Si se quitan 6 cajones de la A puede poner uno más de la B. ¿Cuál es el peso de los cajones A y B si el camión puede cargar 4800 kilogramos?
R,(120;720)

$11 \to$ La suma de dos números da 13 y su diferencia es 9. ¿Cuáles son esos números?
R,(11;2)

Resolver las siguientes desigualdades:

$12 \to x + 5 - 7 \succ 6$

$R, \quad x \succ 8$

$$13 \to \left[\frac{(x+3)}{2}\right] \div \frac{1}{4} \prec 3$$

$R, \quad x \prec -3/2$

$$14 \to \left[\frac{1}{(2x + 2/3)}\right] \cdot \frac{3}{5} \leq 1$$

$R, \quad x \geq -1/30$

$$15 \to \frac{2x+1}{3} - \frac{1}{2} \succ \frac{x}{6}$$

$R, \quad x \succ 1/3$

$$16 \to \frac{x+2}{2} - \frac{2-x}{10} \prec \frac{1}{5}$$

$R, \quad x \prec -1$