Elementos de Matemáticas II

Carlos Uzcátegui
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes
uzca@ula.ve

Versión: Marzo 2007

Índice general

Prólogo

Estas notas están dirigidas a estudiantes que inician los estudios de licenciatura en Matemáticas. Fueron escritas entre los años 1997 y 1999 y desde entonces han sido objeto de varias revisiones. En varios momentos de su elaboración hemos consultado los libros [1, 2, 3, 4]. Deseo agradecer a los profesores Hernando Gaitán, Olga Porras, Oswaldo Araujo y Georgio Bianchi por las observaciones y sugerencias que han hecho sobre estas notas. También quiero agradecer a los estudiantes que han usado estas notas por sus comentarios, algunas de sus preguntas fueron incorporadas como ejercicios. Este es un trabajo no concluido que está siendo revisado (los comentarios serán apreciados y pueden ser enviados a la siguiente dirección: uzca@ula.ve).

Capítulo 1

Los Números Racionales

En este capítulo estudiaremos los números racionales, es decir, los números que se obtienen como cociente de dos enteros. Para esto presentaremos las propiedades algebraicas (es decir, las que satisfacen las operaciones de suma y multiplicación) de los racionales que se pueden tomar como las más básicas de tal manera que todas las otras se deduzcan de ellas. Comenzaremos presentando las propiedades algebraicas de los enteros para que nos sirvan de modelo para la de los racionales. Como veremos, para entender mejor a los racionales, además de sus propiedades algebraicas, también debemos estudiar las propiedades del orden de los racionales. Esto será de crucial importancia para comprender la diferencia entre el conjunto de los números racionales y el de los números reales.

1.1. Los enteros desde un punto de vista abstracto

Antes de explicar qué haremos en esta sección creemos conveniente presentar un ejemplo que ilustre lo que queremos hacer. Considere la siguiente ecuación en dos variables x e y:

$$4x + 5 - y = 4y - x + 5$$

Por el procedimiento que el lector debe conocer bien, de la igualdad anterior se concluye que

$$4x + x = 4y + y + 5 - 5.$$

Por lo tanto

$$5x = 5y$$

y en consecuencia

$$x = y.$$

Le pedimos al lector que analice lo que acabamos de hacer y explique porqué estos cálculos son correctos. Es decir, determine cuáles principios lógicos y cuáles propiedades poseen los números que garanticen la validez de la conclusión final, es decir, que $x = y$.

El objetivo de esta sección es precisamente aislar esas propiedades de los números y mostrar como ellas garantizan que razonamientos similares al anterior son correctos. Para esto, estudiaremos a los números desde un punto de vista abstracto y formal. Con esto queremos decir que los estudiaremos basados exclusivamente en sus propiedades algebraicas.

1.1.1. Las propiedades algebraicas de los enteros

Comenzaremos estudiando los enteros, después los racionales y finalmente los números reales. A continuación damos una lista de las propiedades básicas que satisfacen las operaciones de suma y multiplicación. Las letras a, b y c denotarán enteros.

P1 $a + (b + c) = (a + b) + c$ (*Ley asociativa para la suma*).

P2 $a + b = b + a$ (*Ley conmutativa para la suma*).

P3 Existe un entero que denotaremos por 0 tal que $d+0 = d$ para todo entero d. (*Existencia de elemento neutro para la suma*).

P4 Para cada entero x existe otro entero y tal que $x + y = 0$ (*Existencia de elemento inverso con respecto a la suma*).

P5 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (*Ley asociativa para la multiplicación*).

P6 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (*Ley distributiva para la suma y la multiplicación*).

P7 $a \cdot b = b \cdot a$ (*Ley conmutativa para la multiplicación*).

P8 Existe un entero que denotaremos por 1 tal que $d \cdot 1 = d$ para todo entero d (*Existencia de elemento neutro para la multiplicación*) y $0 \neq 1$.

Muchas de las propiedades algebraicas de los enteros se pueden deducir a partir de estas ocho propiedades junto con las leyes de la lógica. Ilustrar este hecho es el objetivo principal de esta sección. Las demostraciones las presentaremos de una manera que, podríamos decir, es mas "rigurosa"[1] que la usada hasta ahora. La diferencia consistirá en que seremos mas precisos en señalar cuáles son los principios y leyes usados para justificar los argumentos presentes en las demostraciones.

1.1.2. Propiedades de la suma

Para iniciar nuestro estudio formal de las propiedades de la suma daremos una justificación de la ley de cancelación para la suma.

Proposición 1.1. *(Ley de cancelación para +) Dados enteros a, b y c tales que $b+a = c+a$ se cumple que $b = c$.*

Demostración: Fijemos a, b y c. En lo que sigue denotaremos por d al inverso aditivo de a dado en la propiedad **P4**, es decir, d satisface que $a + d = 0$.

[1] En matemáticas se le da una gran importancia a los argumentos rigurosos, por éstos entenderemos aquellos argumentos de gran precisión y exactitud tanto lógica como conceptual.

	Afirmación	Justificación
(1)	$b + a = c + a$	Hipótesis
(2)	$(b + a) + d = (c + a) + d$	Sumando d a cada lado de la igualdad (1)
(3)	$b + (a + d) = c + (a + d)$	De (2) y **P1**
(4)	$b + 0 = c + 0$	De (4) y el hecho que $a + d = 0$
(5)	$b = c$	De (4) y **P3**

□

Si el lector analiza con cuidado el razonamiento usado podrá observar que además de las propiedades **P1**, ..., **P8** usamos implícitamente otros principios lógicos relativos a las propiedades de la relación de igualdad. En efecto, en la línea (2) implícitamente hemos usado que al sumar d a cada lado de una igualdad se mantiene la igualdad. Por otra parte, la propiedad **P1** nos asegura que $(b+a)+d = b+(a+d)$ y también que $(c+a)+d = c+(a+d)$ y de esto junto con (2) hemos concluido (3). El principio que está detrás de este argumento es que si dos cantidades son iguales a una tercera, entonces ellas son iguales entre sí. A continuación enunciaremos con precisión estos sencillos principios que casi nunca se menciona explícitamente por ser "obvios" pero que son imprescindibles.

Comenzamos con las propiedades "lógicas" de la igualdad. Las letras $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ denotan números cualesquiera o expresiones algebraicas.

I1 $\mathcal{A} = \mathcal{A}$ (Reflexividad)

I2 Si $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ (Simetría)

I3 Si $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{C}$ (Transitividad)

Las siguientes propiedades se conocen como *propiedades de compatibilidad* de la igualdad y las operaciones de suma y multiplicación.

C1 Sean a, b, c enteros. Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$ y $c + a = c + b$.

C2 Sean a, b, c enteros. Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$ y $c \cdot a = c \cdot b$.

Ejemplo 1.2. Daremos una justificación de la siguiente identidad:

$$(a + b) + c = (c + b) + a.$$

Transformaremos la expresión de la izquierda en la de la derecha usando como reglas de transformación las especificadas por las propiedades **P1**,..., **P8**.

(1)	$(a + b) + c = c + (a + b)$	**P2**
(2)	$a + b = b + a$	**P2**
(3)	$c + (a + b) = c + (b + a)$	De (2) y **C1**
(4)	$c + (b + a) = (c + b) + a$	**P1**
(5)	$(a + b) + c = (c + b) + a$	De (1), (3) y (4) e **I3**

□

Ejemplo 1.3. Para ilustrar lo engorroso que sería mencionar el uso de los principios **I1**, **I2**, **I3**, **C1** y **C2** daremos una prueba de la ley de cancelación para la suma donde haremos explícito el uso de ellos.

(1)	$b+a$	$= c+a$	Hipótesis.
(2)	$(b+a)+d$	$= (c+a)+d$	De (1) por **C1**, donde d es el inverso de a dado por **P4**
(3)	$b+(a+d)$	$= (b+a)+d$	Por **P1**
(4)	$c+(a+d)$	$= (c+a)+d$	Por **P1**
(5)	$b+(a+d)$	$= (c+a)+d$	De (2) y (3) por **I3**
(6)	$b+(a+d)$	$= c+(a+d)$	De (4) y (5) por **I2** y **I3**
(7)	$a+d$	$= 0$	Por **P4** pues d es el inverso de a fijado en (2)
(8)	$b+(a+d)$	$= b+0$	De (7) por **C1**
(9)	$b+0$	$= b$	Por **P3**
(10)	$b+(a+d)$	$= b$	De (8) y (9) por **I3**
(11)	$c+(a+d)$	$= c+0$	De (7) por **C1**
(12)	$c+0$	$= c$	Por **P3**
(13)	$c+(a+d)$	$= c$	De (11) y (12) por **I3**
(14)	$b+(a+d)$	$= c$	De (6) y (13) por **I3**
(15)	b	$= c$	De (10) y (14) por **I2** y **I3**

□

Observación: Una de las ventajas que tiene esta forma de presentar las demostraciones es que los principios lógicos y matemáticos en que se basan los argumentos quedan completamente especificados. Al contrario de lo que ocurre en las presentaciones mas informales de las pruebas, donde el uso de esos principios puede pasar desapercibido. Para acortar la longitud de las demostraciones algunos pasos serán abreviados.

Una diferencia importante entre los principios **I2, I3, C1, C2** y el resto, es que los primeros se expresan por medio de proposiciones condicionales. Por esta razón cada vez que hagamos uso de ellos debemos señalar la línea (o las líneas) de la demostración donde se verificó la premisa. Por ejemplo, la línea (5) se justificó con **I3** y tuvimos que señalar que las líneas (2) y (3) contienen la premisa de **I3**:

$$b+(a+d) = (c+a)+d \qquad \text{premisa}$$

$$c+(a+d) = (c+a)+d \qquad \text{premisa}$$

$$b+(a+d) = c+(a+d) \qquad \text{conclusión}$$

El lector podrá comprobar que las únicas líneas que en su justificación se requiere mencionar una (o algunas) de las líneas anteriores son aquellas que hacen uso de **I2, I3, C1** o **C2**.

Mostraremos a continuación que el inverso aditivo de un entero (como lo indica la propiedad **P4**) es único. El esquema que seguiremos ocurre con frecuencia y le recomendamos al lector que le ponga atención: Supondremos que un entero a tiene dos inversos aditivos b y d y después mostraremos que $b = d$.

Proposición 1.4. *Sea a un entero, existe un único entero b tal que $a + b = 0$.*

Demostración: Supongamos que b y d son enteros que satisfacen:

$$a + b = 0$$

$$a + d = 0$$

De lo anterior se concluye (usando **I3**) que

$$a + b = a + d$$

Podemos ahora usar la proposición 1.1 y concluir que $d = b$.

□

Ya que cada entero tiene un único inverso lo denotaremos con un símbolo especial:

$$-a.$$

Observe el lector que si dos enteros a y b satisfacen que $a+b = 0$, entonces podemos concluir que $b = -a$ (es decir, b es el inverso de a) y también que $a = -b$ (es decir, que a es el inverso de b). Usualmente se escribe $a - b$ en lugar de $a + (-b)$.

A continuación mostraremos dos propiedades del inverso aditivo que el lector seguramente conoce y ahora veremos como se deducen de los principios básicos.

Proposición 1.5. *Sean a y b enteros. Se tiene que*
(i) $-(-a) = a$,
(ii) $-(a + b) = -a - b$.

Demostración: Note el lector que (i) simplemente dice que el inverso de $-a$ es a. En efecto, como $a + (-a) = 0$, de la unicidad del inverso concluimos que $-(-a) = a$.

Para establecer la validez de (ii) bastaría ver que $-a - b$ es el inverso aditivo de $a + b$. En efecto,

(0)	$-a - b$	$=$	$-b - a$	Por **P2**
(1)	$(a + b) + (-a - b)$	$=$	$(a + b) + (-b - a)$	De (0) por **C1**
(2)	$((a + b) - b) - a$	$=$	$(a + b) + (-b - a)$	Por **P1**
(3)	$(a + b) - b$	$=$	$a + (b - b)$	Por **P1**
(4)	$a + (b - b)$	$=$	$a + 0$	Por **P4** y **C1**
(5)	$a + 0$	$=$	a	Por **P3**
(6)	$(a + b) - b$	$=$	a	De (3), (4) y (5) por **I3**
(7)	$((a + b) - b) - a$	$=$	$a - a$	De (6) por **C1**
(8)	$((a + b) - b) - a$	$=$	0	De (7) por **P4** y **I3**
(9)	$(a + b) + (-a - b)$	$=$	0	De (1), (2) y (8) por **I2** y **I3**

□

De lo visto hasta ahora, podemos decir que el esquema ha seguir para la demostración de una igualdad en la aritmética se puede resumir de la manera siguiente: *Use las propiedades* **P1,..., P8** *y cuando haga falta sustituya "iguales por iguales".*

1.1.3. Propiedades de la multiplicación

Hasta ahora no hemos mostrado ninguna de las propiedades de la multiplicación. Al igual que con la suma, las propiedades de la multiplicación las podemos establecer basándonos en **P1,..., P8**, **C1,C2** y **I1, I2, I3**.

Proposición 1.6. *$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ para todo entero a.*

Demostración: Por **P7** es suficiente mostrar que $a \cdot 0 = 0$.

$$\begin{array}{lrcll}
(1) & a \cdot 0 + a \cdot 0 & = & a \cdot (0+0) & \text{Por } \mathbf{P6} \\
(2) & 0+0 & = & 0 & \text{Por } \mathbf{P3} \\
(3) & a \cdot (0+0) & = & a \cdot 0 & \text{De (2) por } \mathbf{P7} \text{ y } \mathbf{C2} \\
(4) & a \cdot 0 + a \cdot 0 & = & a \cdot 0 & \text{De (1) y (3) por } \mathbf{I3} \\
(5) & a \cdot 0 + a \cdot 0 & = & a \cdot 0 + 0 & \text{De (4) por } \mathbf{I3} \text{ y } \mathbf{P3} \\
(6) & a \cdot 0 & = & 0 & \text{De (5) por proposición 1.1}
\end{array}$$

□

Proposición 1.7. *Sean a, c enteros. Entonces $-(a \cdot c) = (-a) \cdot c$.*

Demostración: Basta mostrar que $a \cdot c + (-a) \cdot c = 0$, pues esto garantiza que el inverso de $a \cdot c$ es precisamente $(-a) \cdot c$.

$$\begin{array}{lrcll}
(1) & a \cdot c + (-a) \cdot c & = & a \cdot (c + (-c)) & \text{Por } \mathbf{P6} \\
(2) & a \cdot c + (-a) \cdot c & = & a \cdot 0 & \text{De (1), } \mathbf{P4} \text{ y } \mathbf{C2} \\
(3) & a \cdot 0 & = & 0 & \text{Por proposición 1.6} \\
(4) & a \cdot c + (-a) \cdot c & = & 0 & \text{De (2) y (3) por } \mathbf{I3}
\end{array}$$

□

Mostraremos a continuación que el elemento neutro para la multiplicación es único.

Proposición 1.8. *Supongamos que b es un entero tal que $a \cdot b = a$ para todo entero a. Entonces $b = 1$.*

Demostración: Como $a \cdot b = a$ para todo $a \in \mathbb{Z}$, en particular sustituyendo a por 1 tenemos que $1 \cdot b = 1$. Por **P7** tenemos que $1 \cdot b = b \cdot 1$ y en consecuencia por **P8** e **I3** tenemos que $b = 1 \cdot b$. Por lo tanto $b = 1$.

□

Ahora queremos demostrar la ley de cancelación para la multiplicación. Es decir, queremos ver que si $a \neq 0$ y

$$a \cdot c = a \cdot b$$

entonces $c = b$. >Cómo razonaríamos informalmente para mostrar esta ley?. De la igualdad anterior se tiene que

$$a \cdot c - a \cdot b = 0.$$

Por lo tanto,

$$a \cdot (c - b) = 0.$$

Como a se supone que no es igual a cero, entonces necesariamente $c - b = 0$, es decir $c = b$. Aqui hemos hecho uso una propiedad importante de los números: si el producto de dos enteros es igual a cero, entonces alguno de ellos es igual a cero. Sin embargo, esta propiedad no se puede validar usando solamente los principios **P1**,..., **P8**. Por esta razón introduciremos otras propiedades. Denotaremos con el símbolo $\mathbb{Z}^+$ al conjunto de los números enteros positivos. Las propiedades de los enteros positivos que serán fundamentales son las siguientes:

P9 (Ley de Tricotomía) Para todo número entero a se cumple una, y sólo una, de las siguientes afirmaciones:

1. $a = 0$.
2. $a \in \mathbb{Z}^+$.
3. $-a \in \mathbb{Z}^+$.

P10 Si $a, b \in \mathbb{Z}^+$, entonces $a + b \in \mathbb{Z}^+$.

P11 Si $a, b \in \mathbb{Z}^+$, entonces $a \cdot b \in \mathbb{Z}^+$.

Proposición 1.9. *Sean a y b enteros. Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$.* [2]

Demostración: Mostraremos la contrarecíproca, es decir, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \cdot b \neq 0$. Por la tricotomía **P9** tenemos que $a \in \mathbb{Z}^+$ o $-a \in \mathbb{Z}^+$ y análogamente $b \in \mathbb{Z}^+$ o $-b \in \mathbb{Z}^+$. De esto se concluye que existen cuatro casos posibles:
(i) $a \in \mathbb{Z}^+$, $b \in \mathbb{Z}^+$,
(ii) $a \in \mathbb{Z}^+$ y $-b \in \mathbb{Z}^+$,
(iii) $-a \in \mathbb{Z}^+$ y $b \in \mathbb{Z}^+$ y finalmente
(iv) $-a \in \mathbb{Z}^+$ y $-b \in \mathbb{Z}^+$.

Cada uno de estos cuatro casos hay que tratarlo por separado, pero de manera similar. Comencemos con el primer caso. (i) Si $a \in \mathbb{Z}^+$, $b \in \mathbb{Z}^+$, entonces por **P11** se concluye que $a \cdot b \in \mathbb{Z}^+$. Por lo tanto por la tricotomía $a \cdot b \neq 0$.

Supongamos ahora que se da el caso (ii). Si $a \in \mathbb{Z}^+$ y $-b \in \mathbb{Z}^+$, entonces $a \cdot (-b) \in \mathbb{Z}^+$ por **P11**. Como $-(a \cdot b) = a \cdot (-b)$, entonces $-(a \cdot b) \neq 0$ (por **P9**). Por lo tanto $a \cdot b \neq 0$ (>porqué?). Dejaremos a cargo del lector los dos casos restantes.

□

De lo dicho anteriormente y la proposición 1.9 se obtiene la ley de cancelación para la multiplicación. Dejamos a cargo del lector completar los detalles de este argumento.

Proposición 1.10. *(Ley de cancelación para la multiplicación) Sean a, b y c enteros con $c \neq 0$. Si $a \cdot c = b \cdot c$, entonces $a = b$.*

□

[2] Como lo mencionamos anteriormente, la proposición 1.9 no se puede demostrar sin hacer uso de los principios **P9**,**P10** y **P11**. Esta afirmarción no es fácil de verificar. Piense el lector cómo puede uno mostrar que una proposición no se puede demostrar.

A manera de ejemplo, mostraremos ahora que $1 \in \mathbb{Z}^+$. En efecto, primero observemos que

$$a \cdot a = (-a) \cdot (-a)$$

(>porqué?) para cualquier entero a. En particular, esto nos dice que si a es un entero no nulo, entonces independientemente de si a pertenece o no a $\mathbb{Z}^+$, se tiene que $a \cdot a \in \mathbb{Z}^+$. En consecuencia, como $1 \neq 0$ y $1 \cdot 1 = 1$ (por **P8**), entonces $1 \in \mathbb{Z}^+$.

1.1.4. Propiedades del orden

El orden de $\mathbb{Z}$ también lo podemos estudiar de manera abstracta aislando sus propiedades fundamentales. La idea central es que un entero a es menor que un entero b si $b-a$ es positivo. Esto es la clave para definir de manera abstracta el orden: Basta conocer los enteros positivos y la operación de restar.

El objetivo de esta sección es mostrar que las propiedades fundamentales del orden se deducen a partir de **P1**,..., **P11**. Un ejemplo típico es el siguiente. Considere la siguiente afirmación:

$$\text{Si } a \leq b \text{ y } b \leq c, \text{ entonces } a \leq c.$$

Para verificar que es cierta, notemos que las hipótesis nos dicen que $0 \leq b - a$ y $0 \leq c - b$. Sumando miembro a miembro obtenemos que $0 \leq b - a + c - b$. En consecuencia, $0 \leq c - a$. Es decir, $a \leq c$. En esta sección mostraremos que este tipo de razonamientos están validados por los principios **P1**,..., **P11**.

Definición 1.11. *Sean a, b enteros, diremos que a es estrictamente menor que b y escribiremos $a < b$, si se cumple que $b - a \in \mathbb{Z}^+$. Escribiremos $a \leq b$ si $a = b$ o $a < b$.*

Observemos que, de la definición de $<$ y del hecho que 0 es neutro para la suma, se tiene que $a \in \mathbb{Z}^+$ es equivalente a $0 < a$.

En lugar de $b < a$ también usaremos el símbolo $a > b$ y lo leeremos *“ a mayor que b”*. De igual manera escribiremos $a \geq b$ cuando b es menor o igual que a.

Proposición 1.12. *La relación $\leq$ definida en 1.11 es un* orden total*, es decir, satisface lo siguiente:*

(i) (Reflexividad) $a \leq a$.

(ii) (Transitividad) *Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.*

(iii) (Antisimetría) *Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.*

(iv) (Linealidad del Orden) *Para todo a y b se cumple una, y sólo una, de las siguiente alternativas: $a < b$, $b < a$ ó $a = b$.*

Demostración:

(i) es obvio a partir de la definición de $\leq$.

(ii) Consideraremos tres casos. *Caso 1:* Si $a = b$, entonces es claro que $a \leq c$. *Caso 2:* Si $b = c$, entonces $a \leq c$. *Caso 3:* Supongamos que $a < b$, y $b < c$ y mostremos que $a < c$. En efecto,

(1)	$b - a \in \mathbb{Z}^+$			Por hipótesis $a < b$
(2)	$c - b \in \mathbb{Z}^+$			Por hipótesis $b < c$
(3)	$(b - a) + (c - b) \in \mathbb{Z}^+$			De (1) y (2) y **P10**
(4)	$(b - a) + (c - b)$	$=$	$(c - b) + (b - a)$	Por **P2**
(5)	$(c - b) + (b - a)$	$=$	$((c - b) + b) - a$	Por **P1**
(6)	$(c - b) + b$	$=$	$c + (-b + b)$	Por **P1**
(7)	$(c - b) + b$	$=$	c	De (6) por **P3**, **P4** e **I3**
(8)	$(c - b) + (b - a)$	$=$	$c - a$	De (5), (6) y (7) por **C1** e **I3**
(9)	$c - a \in \mathbb{Z}^+$			De (3), (4) y (8) por **I3**
(10)	$a < c$			De (9) y la definición de $<$

(iv) Sean a y b dos enteros, y consideremos el entero $a - b$. Por **P9** una, y sólo una, de las siguientes alternativas se cumple: (1) $a - b \in \mathbb{Z}^+$, (2) $a - b = 0$ ó $-(a - b) \in \mathbb{Z}^+$. Analicemos las tres alternativas por separado:

(1) Si $a - b \in \mathbb{Z}^+$, entonces $b < a$.

(2) Si $a - b = 0$, entonces $a = b$ (justifíquelo).

(3) Finalmente suponga que $-(a - b) \in \mathbb{Z}^+$. Por la proposición 1.5(ii) tenemos que $-(a - b) = -a - (-b) = -a + b = b - a$ y por lo tanto $b - a \in \mathbb{Z}^+$, es decir $a < b$.

(iii) Por reducción al absurdo, si $a \neq b$, entonces de la hipótesis se tendría que $a < b$ y $b < a$, pero esto contradice lo mostrado en (iv).

$\square$

Observación: En la demostración de la parte (ii) de la proposición anterior hemos usado otro principio lógico que por ser muy obvio pasa desapercibido. En la linea (9) de esa demostración concluimos que $c - a \in \mathbb{Z}^+$. Para hacerlo nos basamos en que $(b - a) + (c - b) = c - a$ y que $(b - a) + (c - b) \in \mathbb{Z}^+$. El principio que estamos usando (y que seguiremos haciendo sin mencionarlo) es el siguiente:

Sea C un conjunto. Si $a \in C$ y $a = b$, entonces $b \in C$.

Ahora mostraremos que la suma y el orden de $\mathbb{Z}$ son compatibles.

Proposición 1.13. *Sean a, b, c y d enteros.*

(i) Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ para todo entero c.

(ii) Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.

(iii) Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$ para todo entero c.

(iv) Si $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces $a + c \leq b + d$.

Demostración:

(i) Sean a y b enteros tales que $a < b$. Tenemos que

(1)	$b - a \in \mathbb{Z}^+$			Por hipótesis $a < b$
(2)	$-(a+c)$	$=$	$-a-c$	Por la proposición 1.5.
(3)	$(b+c)-(a+c)$	$=$	$(b+c)+(-a-c)$	De (2) por **C1**
(4)	$(b+c)+(-a-c)$	$=$	$b-a$	Ver ejercicio 3e
(5)	$(b+c)-(a+c)$	$=$	$b-a$	De (3) y (4) por **I3**
(6)	$(b+c)-(a+c) \in \mathbb{Z}^+$			De (1) y (5)
(7)	$a+c < b+c$			De (6) por la definición de $<$

(ii) Sean a, b, c y d enteros tales que $a < b$ y $c < d$. Tenemos que

(1)	$b - a \in \mathbb{Z}^+$	Por hipótesis $a < b$
(2)	$d - c \in \mathbb{Z}^+$	Por hipótesis $c < d$
(3)	$(b-a)+(d-c) \in \mathbb{Z}^+$	De (1) y (2) por **P10**
(4)	$(b-a)+(d-c) = (b+d)-(a+c)$	Ver ejercicio 3f
(5)	$(b+d)-(a+c) \in \mathbb{Z}^+$	De (3) y (4)
(6)	$a+c < b+d$	De (5) por la definición de $<$

(iii) y (iv) se dejan como ejercicio.

□

La siguiente proposición trata de la compatibilidad de la multiplicación con el orden.

Proposición 1.14. *Sea a, b, c enteros.*

(i) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$. Además si $a \leq b$ y $c > 0$ entonces, $a \cdot c \leq b \cdot c$.

(ii) Si $c < 0$ y $a < b$, entonces $bc < ac$. Además si $a \leq b$ y $c < 0$, entonces $bc \leq ac$.

Demostración: (i) Sean a, b y c enteros tales que $a < b$ y $0 < c$.

(1)	$b - a \in \mathbb{Z}^+$	Por hipótesis $a < b$
(2)	$c \in \mathbb{Z}^+$	Por hipótesis $0 < c$
(3)	$(b-a) \cdot c \in \mathbb{Z}^+$	De (1) y (2) por **P11**
(4)	$(b-a) \cdot c = b \cdot c - a \cdot c$	Por **P6**
(5)	$b \cdot c - a \cdot c \in \mathbb{Z}^+$	De (3) y (4)
(6)	$a \cdot c < b \cdot c$	De (5) por la definición de $<$

Dejamos a cargo del lector completar lo que resta de la demostración.

□

Los enteros tienen otra propiedad fundamental: el principio del mínimo entero positivo. Esta propiedad se expresa en un lenguaje diferente: el lenguaje de la teoría de conjuntos.

Principio de Buena ordenación: Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}^+$ tiene mínimo.

Con el principio de buena ordenación se completa la lista de las propiedades fundamentales de los enteros. Este principio es muy importante, en el se basan las demostraciones por inducción.

Ejercicios 1.1

En los siguientes ejercicios use sólo las propiedades **P1, P2**, ..., **P11** de las operaciones de suma y multiplicación y las propiedades **I1,I2, I3** y **C1** y **C2** de la igualdad.

1. Sea b un entero con la propiedad que existe un entero a tal que $a+b=a$. Muestre que $b=0$. Este ejercicio dice que el elemento neutro para la suma es único.

2. Dados enteros a, b y c tales que $a+b=0$ y $a+c=0$, muestre que $b=c$.

3. Demuestre las siguientes afirmaciones donde a, b, c y d son enteros. Notación: $a^2=a\cdot a$.

   a) $a+b=-(-a-b)$.
   b) $a+b=a-(-b)$.
   c) Si $a-b=c$, entonces $a=b+c$.
   d) Si $a=b+c$, entonces $c=a-b$.
   e) $(a+b)+(c-b)=a+c$.
   f) $(b-a)+(d-c)=(b+d)-(a+c)$.
   g) $a+(b+1)=1+(b+a)$.
   h) $a+(b+(c+d))=((d+c)+b)+a$.
   i) $a\cdot b=(-a)\cdot(-b)$.
   j) $(-a)^2=a^2$.
   k) Si $a+b=c+d$ y $a+c=b+d$, entonces $b=c$. $>$Es $a=d$?
   l) Si $c+c=1+1$, entonces $c=1$. (*Sugerencia:* Use la ley distributiva para obtener que $c+c=(1+1)\cdot c$).
   m) $a\cdot(1+b)+c=(c+ab)+a$.

4. Usando las definiciones de $<$ y $\leq$ dadas en esta sección muestre lo siguiente:

   a) Si $0<a$ y $b<0$, entonces $a\cdot b<0$.
   b) Si $a\leq b$ y $b\leq c$, entonces $a\leq c$.
   c) Si $0<a$ y $b<c$, entonces $ab<ac$.
   d) Si $0<a$ y $b\leq c$, entonces $ab\leq ac$.
   e) Si $ac<bc$ y $0<c$, entonces $a<b$.
   f) Si $a<0$ y $b<c$, entonces $ac<ab$.
   g) Si $a<b$ y $c\leq d$, entonces $a+c\leq b+d$.

h) Si $0 < a < b$ y $0 < c < d$, entonces $ac < bd$.

i) Si $a + b = d + c$ y $a < d$, entonces $c < b$.

j) Si $a + b < d + c$ y $c < b$, entonces $a < d$.

k) Si $a+b < d+c$ y $c < b$, entonces $c+a < b+d$. (*Sugerencia:* Muestre primero que $a < d$).

l) Si $a > 0$ y $a \cdot b > 0$, entonces $b > 0$.

5. Justifique, usando los principios vistos en esta sección, que si $4x + 5 - y = 4y - x + 5$, entonces $x = y$.

6. Considere la siguiente “demostración” de: si $a = b$, entonces $2 = 1$.

$$
\begin{array}{lrcl}
(0) & a & = & b \\
(1) & a^2 & = & ab \\
(2) & a^2 - b^2 & = & ab - b^2 \\
(3) & (a+b)(a-b) & = & b(a-b) \\
(4) & a+b & = & b \\
(5) & 2b & = & b \\
(6) & 2 & = & 1
\end{array}
$$

Justifique cuáles de los pasos son correctos y determine donde está el error.

7. Considere la siguiente demostración:

(1)	$a + b$	$=$	b	Por hipótesis.
(2)	$(a + b) - b$	$=$	$b - b$	De (1) por **C1** y **P4**
(3)	$b - b$	$=$	0	Por **P4**
(4)	$(a + b) - b$	$=$	0	De (2) y (3) por **I3**
(5)	$a + (b - b)$	$=$	$(a + b) - b$	Por **P1**
(6)	$a + (b - b)$	$=$	0	De (4) y (5) por **I3**
(7)	$a + (b - b)$	$=$	$a + 0$	De (3) por **C1**
(8)	$a + 0$	$=$	a	Por **P3**
(9)	$a + (b - b)$	$=$	a	De (7) y (8) por **I3**
(10)	a	$=$	0	De (6) y (9) por **I2** y **I3**

$>$Puede decir cuál es la proposición que se demuestra?

1.2. Los números racionales

Los números racionales son las expresiones de la forma $\frac{m}{n}$ con n y m números enteros y $n \neq 0$. El conjunto de los números racionales se denotará con el símbolo $\mathbb{Q}$. Algunos ejemplos de números racionales:

$$\frac{1}{4}, \frac{7}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{9}{-2}.$$

Recordemos que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, pues todo entero m se identifica con la fracción $\frac{m}{1}$. Por ejemplo, el 1 se identifica con la fracción $\frac{1}{1}$ y el 0 con la fracción $\frac{0}{1}$. Notemos que $\frac{2}{8}$ y $\frac{1}{4}$ representan al mismo número. Por esta razón diremos que dos fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$ son *equivalentes* si se cumple que

$$mq = np.$$

En este caso esas dos fracciones *representan* al mismo número racional.

La suma y la multiplicación en $\mathbb{Q}$ se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} + \frac{p}{q} &= \frac{mq + np}{nq} \\ \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} &= \frac{mp}{nq}. \end{aligned}$$

Si las propiedades **P1**, ..., **P8** las entendemos como refiriéndose a números racionales en lugar de a números enteros, entonces se tiene que $\mathbb{Q}$ satisface **P1**, ..., **P8**. Como ilustración verificaremos que **P2** y **P8** se cumplen en $\mathbb{Q}$ y dejaremos el resto como ejercicio (ver ejercicio 3).

- Para ver que **P2** se cumple tenemos que verificar que la suma en $\mathbb{Q}$ es conmutativa. Observemos que
$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq} = \frac{pn + qm}{qn} = \frac{p}{q} + \frac{m}{n}.$$

- Para probar que **P8** se cumple, basta mostrar que 1 es el elemento neutro de la multiplicación. Observemos que
$$\frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} = \frac{m}{n}.$$

Mostraremos que las operaciones de suma y multiplicación que hemos definido no dependen de las fracciones representantes en el sentido expresado en el siguiente resultado.

Proposición 1.15. *Sean n, m, p y q enteros, con $n \neq 0 \neq q$. Supongamos que n', m', p' y q' son otros enteros tales que las fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{m'}{n'}$ son equivalentes y las fracciones $\frac{p}{q}$ y $\frac{p'}{q'}$ también son equivalentes. Entonces*

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} + \frac{p}{q} &\quad \textit{es equivalente a} \quad \frac{m'}{n'} + \frac{p'}{q'} \\ \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} &\quad \textit{es equivalente a} \quad \frac{m'}{n'} \cdot \frac{p'}{q'}. \end{aligned}$$

Demostración: Mostraremos la segunda afirmación y dejaremos la primera como ejercicio. De la definición de la multiplicación lo que tenemos que mostrar es que

$$\frac{mp}{nq} \quad \text{es equivalente a} \quad \frac{m'p'}{n'q'}.$$

Es decir, debemos mostrar que

$$mpn'q' = m'p'nq.$$

Po hipótesis, sabemos que $mn' = nm'$ y $pq' = p'q$. Multiplicando término a término estas igualdades obtenemos lo buscado.

$\square$

La característica mas importante que distingue a los racionales de los enteros es que en $\mathbb{Q}$ existe inverso para la multiplicación pero en $\mathbb{Z}$ no. Añadiremos una nueva propiedad a la lista de las propiedades **P1**,...,**P8** la cual afirma que todo elemento distinto del cero tiene inverso multiplicativo.

P12 Para todo $a \in \mathbb{Q}$ con $a \neq 0$, existe $b \in \mathbb{Q}$ tal que $a \cdot b = 1$.

La propiedad **P12** no es válida en $\mathbb{Z}$ (¿por qué?). Recordemos que el inverso para la multiplicación en $\mathbb{Q}$ viene dado por la siguiente expresión: Sean n, m enteros no nulos

$$\left(\frac{n}{m}\right)^{-1} = \frac{m}{n}.$$

Para verificar que $\mathbb{Q}$ satisface **P12** observemos que si $m, n \in \mathbb{Z}$ son ambos distintos de cero, entonces

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{1}{1} = 1.$$

Por el simple hecho que en $\mathbb{Q}$ se satisfacen **P1**,..., **P8** tenemos que las proposiciones que mostramos ser válidas para $\mathbb{Z}$ también lo son para $\mathbb{Q}$.

Por ejemplo, la siguiente proposición se demuestra igual a como lo hicimos para los enteros (ver las proposiciones 1.1, 1.4, 1.8 y el ejercicio 1 de §1.1).

Proposición 1.16. *(i) En $\mathbb{Q}$ los elementos neutro para la suma y la multiplicación son únicos. De manera similar el elemento inverso para la suma en $\mathbb{Q}$ es único.*

(ii) Sean $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Si $a + b = a + c$, entonces $b = c$ (Ley de cancelación para la suma).

$\square$

Proposición 1.17. *En $\mathbb{Q}$ el elemento inverso para la multiplicación es único.*

Demostración: Sea a un racional. Como es usual, para demostrar la unicidad del inverso supondremos que a tiene dos inversos b y c y mostraremos que $b = c$. Supongamos entonces que $b, c \in \mathbb{Q}$ satisfacen que

$$a \cdot b = 1 \;\text{ y }\; a \cdot c = 1. \tag{1.1}$$

Multiplicando por c ambos lados de la primera igualdad en (1.1), obtenemos que

$$(a \cdot b) \cdot c = 1 \cdot c.$$

De lo anterior se obtiene que

$$(a \cdot b) \cdot c = c.$$

Por las leyes asociativa y conmutativa para la multiplicación obtenemos que

$$b \cdot (a \cdot c) = c.$$

Como $a \cdot c = 1$, entonces $b \cdot (a \cdot c) = b \cdot 1$. Y por lo tanto $b \cdot (a \cdot c) = b$. Como $b \cdot (a \cdot c) = c$, entonces $c = b$. $\square$

La notación usual para el inverso multiplicativo de un racional a es a^{-1}.

Ejercicios 1.2

1. Realize las operaciones indicadas

   a) $\frac{1}{3} + \frac{3}{4}$

   b) $(\frac{2}{5} + \frac{7}{3}) - \frac{4}{8}$

   c) $\frac{4}{7} + \frac{9}{-5} - \frac{3}{5}$

   d) $\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{11}$

   e) $\frac{9}{2} \cdot \frac{-6}{5}$

   f) $(\frac{4}{6} + \frac{45}{13}) \cdot (\frac{-3}{5})^{-1}$

2. Complete la demostración de la proposición 1.15.

3. Muestre que la suma y la multiplicación en $\mathbb{Q}$ satisfacen las propiedades **P1, P2**,..., **P8**, **P12**.

4. Muestre a partir de **P1**,..., **P8**, **P12** las siguientes afirmaciones, donde a y b denotan racionales:

   a) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

   b) $(a^{-1})^{-1} = a$.

   c) $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$.

   d) $a^2 = a$ si, y sólo si, $a = 0$ ó $a = 1$.

   e) $a^2 = 1$ si, y sólo si, $a = 1$ ó $a = -1$.

1.3. La ecuación $ax + b = c$

El problema de resolver ecuaciones ha sido fundamental en el desarrollo de las matemáticas. En esta pequeña sección comentaremos la importante relación existente entre los racionales y el problema de resolver ecuaciones lineales.

Considere la siguiente ecuación:

$$3x = 5.$$

Esta ecuación no tiene solución en $\mathbb{Z}$, pues no existe un entero que al sustituir la x por él satisfaga la ecuación anterior. Sin embargo, esta ecuación si tiene solución en el conjunto de los números racionales. Precisamente, $\frac{1}{3}$ es una solución.

En general tenemos que la ecuación de la forma

$$ax + b = c$$

donde a, b, c son racionales (llamados los *coeficientes* de la ecuación) y $a \neq 0$, tiene solución en $\mathbb{Q}$. En efecto, despejando x obtenemos que

$$x = (c - b) \cdot a^{-1}$$

es la solución. En general este número no es entero y por lo tanto esa ecuación no tiene, en general, solución en $\mathbb{Z}$ pero si la tiene en $\mathbb{Q}$.

En conclusión podemos decir que, en lo que se refiere a resolver ecuaciones lineales, el conjunto de los números racionales es un sistema numérico que extiende al de los enteros y en el cual es posible resolver todas las ecuaciones lineales con coeficiente racionales.

Ejercicios 1.3

1. Un gavilán le grita a un grupo de palomas posadas en un árbol: Adiós mis cien palomas. Una de las palomas le contesta: Nosotras, más la mitad de nosotras, más la tercera parte de nosotras más usted señor gavilán somos cien. ¿Cuántas palomas había en el árbol? Plantee una ecuación cuya solución de la respuesta a la pregunta anterior.

2. Halle la solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

   a) $3x + 5 = 7$

   b) $2x - 8 = 9$

   c) $5 - 4x = 12$

   d) $\frac{1}{4}x - 6 = \frac{5}{7}$

   e) $\frac{3x}{4} + \frac{3}{6} = -2x + 5$

   f) $5y - 6 = -7y + 9$

1.4. La ecuación $x^2 = a$

La división (operación inversa de la multiplicaión) es siempre posible en $\mathbb{Q}$ y es por esto que la ecuación $ax + b = c$ tiene solución en $\mathbb{Q}$ (cuando a, b y c son racionales). Sin embargo no ocurre lo mismo con la potenciación y , como veremos enseguida, no existe un racional r tal que $r^2 = 2$, o para decirlo de manera equivalente, la ecuación $x^2 = 2$ no tiene solución en $\mathbb{Q}$.

Antes de mostrar que no existe un racional cuyo cuadrado sea 2 necesitamos recordar un hecho importante acerca de las fracciones. Ya dijimos que un número racional está representado por una infinidad de fracciones. Sin embargo, entre todas las fracciones que representan a un racional dado hay una que se distingue de las demás por estar en forma *irreducible*. Una fracción $\frac{m}{n}$ se dice *irreducible* si $mcd(m, n) = 1$ y $n > 0$, es decir, si n y m son coprimos. Recuerde que $mcd(n, m)$ denota el máximo común divisor de n y m. La siguiente proposición muestra lo que acabamos de decir.

Proposición 1.18. *Dada una fracción $\frac{m}{n}$ existe otra fracción $\frac{p}{q}$ irreducible tal que $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.*

Demostración: Sea m, n dos enteros con $n \neq 0$. Denotaremos $mcd(n, m)$ por d. Sea $p = m/d$ y $q = n/d$. Entonces $mcd(p, q) = 1$ y además $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$.

□

La proposición anterior nos dice que siempre podemos suponer, si hace falta, que un número racional está representado por una fracción irreducible.

Proposición 1.19. *No existe un racional r tal que $r^2 = 2$.*

Demostración: Daremos un argumento indirecto, por reducción al absurdo. Supongamos que tal racional existe, sea entonces $\frac{m}{n}$ una fracción tal que

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Por la proposición 1.18 podemos suponer que $\frac{m}{n}$ es irreducible (¿por qué?), es decir que $mcd(m, n) = 1$. Tenemos entonces que

$$\frac{m^2}{n^2} = 2$$

y por lo tanto $m^2 = 2n^2$. Luego m^2 es par. Afirmamos que en consecuencia m también es par. En efecto, si m no fuera par, entonces sería impar, es decir, $m = 2l + 1$ para algún entero l. Por lo tanto,

$$m^2 = (2l + 1)^2 = 4l^2 + 4l + 1 = 2(2l^2 + 2l) + 1$$

y de esto se tendría que m^2 es impar. Lo cual no es posible. Por esto m es par.

Como m es par, existe un entero k tal que $m = 2k$. Luego $m^2 = 4k^2$ y por lo tanto $2n^2 = 4k^2$. De esto se obtiene que n^2 es par y como antes esto implica que n también es par. Por lo tanto m y n son pares, en consecuencia $mcd(n, m) \neq 1$, lo que contradice nuestra suposición de que $\frac{m}{n}$ era irreducible.

□

Ejercicios 1.4

1. Determine la fracción irreducible equivalente a la fracción dada:
   (a) $\frac{3}{27}$, (b) $\frac{36}{20}$, (c) $\frac{100}{68}$, (d) $-\frac{26}{28}$, (e) $-\frac{45}{35}$

2. Sea m un entero. Muestre que si m^2 es impar, entonces m es impar.

3. Sean p y q enteros. Muestre que si $mcd(p,q) = 1$, entonces $mcd(p^n, q^n) = 1$ para todo natural n.

4. *a*) En cada uno de los siguiente ejercicios determine si existe un racional r que satisfaga lo indicado:
   (i) $r^3 = 4$, (ii) $r^2 = 12$, (iii) $r^4 = 80$, (iv) $r^3 = 64$,

1.5. El orden en $\mathbb{Q}$

De la misma forma que en $\mathbb{Z}$, podemos definir el orden de $\mathbb{Q}$ usando el conjunto de los racionales positivos (que denotaremos con el símbolo $\mathbb{Q}^+$). Los racionales positivos son las fracciones de la forma $\frac{m}{n}$ con $n, m \in \mathbb{Z}^+$. Sin embargo, como una fracción donde el denominador y el numerador son ambos negativos es positiva, también debemos incluir esas fracciones entre los racionales positivos. En resumen, $\mathbb{Q}^+$ se define como

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{m}{n} : \text{ con } n, m \in \mathbb{Z}^+ \text{ o } -n, -m \in \mathbb{Z}^+ \right\}.$$

Para definir el orden de $\mathbb{Q}$ primero mostraremos que $\mathbb{Q}^+$ tiene las propiedades deseadas, es decir, satisface **P9, P10** y **P11**.

Proposición 1.20. *Sea $\mathbb{Q}^+$ el conjunto de los racionales positivos. Se tiene que*

(i) Si $a, b \in \mathbb{Q}^+$, entonces $a + b, a \cdot b \in \mathbb{Q}^+$

(ii) Para todo racional a se cumple una, y sólo una, de las siguientes afirmaciones:
$a \in \mathbb{Q}^+$, $a = 0$, $-a \in \mathbb{Q}^+$.

(iii) $1 \in \mathbb{Q}^+$.

Demostración: Supongamos que $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} + \frac{p}{q} &= \frac{mq + np}{nq} \\ \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} &= \frac{mp}{nq}. \end{aligned}$$

Para mostrar la parte (i) debemos mostrar que

$$(mq + np) \cdot nq > 0 \qquad \text{y} \qquad mp \cdot nq > 0.$$

En efecto, observemos que

$$(mq + np) \cdot nq = mnq^2 + n^2pq \qquad \text{y} \qquad mp \cdot nq = (mn)(pq).$$

Como $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$, entonces sabemos que $mn > 0$ y $pq > 0$. Por otra parte, n y q no son iguales a cero. En consecuencia $mnq^2 + n^2pq$ es la suma de enteros positivos y por lo tanto es positivo. Por último, tenemos que $(mn)(pq)$ es el producto de enteros positivos y por lo tanto es positivo.

Para ver (ii), sea $\frac{m}{n}$ una fracción cualquiera con $n \neq 0$. Hay tres casos posibles.

- Si $m, n > 0$ ó $n, m < 0$, entonces es claro que $\frac{m}{n}$ está en $\mathbb{Q}^+$.
- Si $m = 0$, entonces $\frac{m}{n}$ es igual a 0.
- Por último si $n \cdot m < 0$, entonces $-\frac{m}{n}$ está en $\mathbb{Q}^+$.

Finalmente, como $1 = \frac{1}{1}$ y $1 > 0$ es claro de la definición de $\mathbb{Q}^+$ que (iii) se cumple.

□

Ahora podemos definir el orden en $\mathbb{Q}$ como lo hicimos en los enteros.

Definición 1.21. *Sean $a, b \in \mathbb{Q}$, definimos*

$$a < b, \text{ si } b - a \in \mathbb{Q}^+.$$

Escribiremos $a \leq b$ si $a = b$ o $a < b$.

La siguiente proposición dice que la relación $\leq$ sobre $\mathbb{Q}$ que acabamos de definir satisface las propiedades que uno espera de un orden. La demostración es similar a la hecha en $\mathbb{Z}$ (ver la proposición 1.12) y la dejaremos a cargo del lector.

Proposición 1.22. *La relación $\leq$ definida en $\mathbb{Q}$ es un* orden total *es decir satisface lo siguiente:*

(i) $a \leq a$ (Reflexividad).

(ii) Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$ (Transitividad).

(iii) Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$ (Antisimetría).

(iv) Para todo a y b se tiene que $a \leq b$ o que $b \leq a$ (Linealidad).

□

La siguiente proposición se puede demostrar de manera análoga a como lo hiciéramos en el caso de los enteros (ver las proposiciones 1.13 y 1.14).

Proposición 1.23. *Sean a, b, c, d racionales.*

(i) Si $a < b$, entonces para todo c, $a + c < b + c$.

(ii) *Si* $a < b$ *y* $c < d$*, entonces* $a + c < b + d$*.*

(iii) *Si* $a \leq b$*, entonces para todo* c*,* $a + c \leq b + c$*.*

(iv) *Si* $a \leq b$ *y* $c \leq d$*, entonces* $a + c \leq b + d$*.*

(v) *Si* $a < b$ *y* $c > 0$*, entonces* $a \cdot c < b \cdot c$*. Además, si* $a \leq b$ *y* $c > 0$*, entonces,* $a \cdot c \leq b \cdot c$*.*

□

Veamos un ejemplo de cómo se trabaja con la definición del orden en $\mathbb{Q}$.

Proposición 1.24. *Sea* a *un número racional. Se tiene que* $a > 0$ *si, y sólo si,* $a^{-1} > 0$*.*

Demostración: Debemos mostrar dos implicaciones.

(i) Supongamos que $a > 0$ y mostremos que $a^{-1} > 0$. El argumento es indirecto. Supondremos que $a^{-1} \not> 0$ y llegaremos a una contradicción.

(1)	$a^{-1} \not> 0$	Por hipótesis.
(2)	$a^{-1} \leq 0$	De (1) y la linealidad de $\leq$.
(3)	$a^{-1} \neq 0$	Ya que $a \cdot a^{-1} = 1 \neq 0$
(4)	$a^{-1} < 0$	De (2), (3) y la defინción de $\leq$
(5)	$-a^{-1} > 0$	Por **P9**
(6)	$a > 0$	Por hipótesis
(7)	$a \cdot (-a^{-1}) > 0$	De (5) y (6) por **P11**
(8)	$a \cdot (-a^{-1}) = -1$	Por **P12**
(9)	$-1 > 0$	De (7) y (8) y esto contradice **P9** pues $1 > 0$

(ii) Supongamos que $a^{-1} > 0$, entonces por lo mostrado en la parte (i) tenemos que $(a^{-1})^{-1} > 0$. Pero $(a^{-1})^{-1} = a$ (ver el ejercicio $4b$ de §1.2) y con esto termina la demostración.

□

Ejercicios 1.5

1. Haga una lista en orden creciente de los siguientes racionales: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{15}{7}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{9}{35}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{4}{6}$,$\frac{5}{9}$.

2. En cada uno de los ejercicios siguientes determine para cuales valores de n se cumple la desigualdad indicada, donde n es un entero positivo:

   a) $\dfrac{n}{n+1} \leq \dfrac{2n}{2n+1}$

   b) $\dfrac{n+3}{2n+1} \leq \dfrac{n}{n+1}$,

   c) $\dfrac{n+3}{2n+1} \leq \dfrac{2n}{2n+1}$.

3. Sean n y m enteros positivos. Determine si la siguiente afirmación es verdadera, justifique su respuesta:
$$\frac{n+m}{n\cdot m} \leq \frac{n\cdot m}{n+m}.$$

4. Usando las propiedades **P1**,..., **P12** y la definición del orden en $\mathbb{Q}$ probar:

   a) $0 < a < 1$ si, y sólo si, $a^{-1} > 1$.

   b) $a > 1$ si, y sólo si, $0 < a^{-1} < 1$.

   c) $0 < a < b$ si, y sólo si, $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

   d) $a < b < 0$ si, y sólo si, $b^{-1} < a^{-1} < 0$.

5. Sean a, b, c y d racionales tales que $a < b < c < d$.

   a) Muestre que $c - b < d - a$.

   b) ¿Será cierto que $c - b < d - c$?

   c) Muestre que $\dfrac{1}{d-a} < \dfrac{1}{d-b} < \dfrac{1}{d-c}$

   d) Muestre que $\dfrac{1}{a-b} < \dfrac{1}{a-c} < \dfrac{1}{a-d}$

   e) ¿Será cierto que $\dfrac{1}{b-a} < \dfrac{1}{b-c} < \dfrac{1}{b-d}$?

6. Sean $a, b \in \mathbb{Q}$ con $a > 0$ y $b > 0$. Muestre que $a < b$ si, y sólo si, $a^2 < b^2$.

7. Sean $a, b \in \mathbb{Q}$.

   a) Muestre que $a^2 + ab + b^2 \geq 0$. (*Sugerencia:* Muestre que $a^2 + ab + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$).

   b) Muestre que $a \leq b$ si, y sólo si, $a^3 \leq b^3$.

8. Muestre que si $a > 2$, entonces $a^2 - 4 \geq 0$.

9. Muestre que si $a > 2$, entonces $a^2 - 2a \geq 0$.

10. Muestre que si $a > 1$ y $b > 1$, entonces $ab > 1$.

11. Dé una prueba de 1.22 y 1.23 (*Sugerencia:* Vea lo hecho en 1.12 y 1.13).

1.6. Subconjuntos densos de $\mathbb{Q}$

La representación geométrica de los racionales es la siguiente. Fijemos una recta l y un punto o en ella. Llevemos infinitas veces un segmento unitario hacia la derecha de ese punto

Dividiendo cada segmento en n partes iguales obtendremos los números racionales de la forma $\frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$. Si hacemos ésto para cada natural n obtendremos una representación geométrica de todos los racionales.

Aunque hemos usado la misma idea para definir el orden de $\mathbb{Q}$ que la usada en $\mathbb{Z}$, el orden de $\mathbb{Q}$ es muy diferente al orden de $\mathbb{Z}$. De la representación se desprende que los racionales están distribuidos sobre la recta de una manera diferente a como están los enteros. En efecto, observemos que cualquier intervalo (r, s) contiene racionales. Por esto se dice que el orden de los racionales es **denso** [3]. La formulación precisa de esta propiedad del orden de $\mathbb{Q}$ es el contenido del siguiente resultado.

Teorema 1.25. *Dados $s, r \in \mathbb{Q}$ con $r < s$, existe $t \in \mathbb{Q}$ tal que $r < t < s$.*

Demostración: Considere el siguiente racional

$$t = \frac{s+r}{2}$$

que corresponde al punto medio de r y s. Mostraremos que $r < t < s$. En efecto,

$$t - r = \frac{s+r}{2} - r = \frac{s-r}{2}.$$

Como $r < s$, entonces por definición del orden, se tiene que $s - r$ es positivo. Ahora bien

$$\frac{s-r}{2} = (s-r) \cdot 2^{-1}.$$

Como 2^{-1} es positivo (¿por qué?) entonces $\frac{s-r}{2}$ también es positivo (por **P11**) y por lo tanto $r < t$. Notemos que $s - t = t - r$ y por consiguiente $s - t > 0$, es decir, $t < s$.

□

Observe que el orden de los enteros no tiene la propiedad expresada en el teorema anterior; por ejemplo, no existe ningún entero entre el 1 y el 2, como tampoco entre el 5 y el 6, etc.

Como veremos en esta sección, existen subconjuntos de $\mathbb{Q}$ que tienen una propiedad similar a la que mostramos en el teorema 1.25, es decir, tienen la propiedad que entre cada dos racionales existe un elemento del subconjunto. Estos subconjuntos se llamarán densos.

Definición 1.26. *Sea $D \subseteq \mathbb{Q}$, diremos que D es* ***denso*** *en $\mathbb{Q}$ si para todo $s, r \in \mathbb{Q}$ con $r < s$, existe $t \in D$ tal que $r < t < s$.*

Ejemplos 1.27.

1. El conjunto $\mathbb{Z}$ no es denso en $\mathbb{Q}$. En efecto, basta notar que, por ejemplo, $3 < 4$ y no existe un elemento t de $\mathbb{Z}$ tal que $3 < t < 4$.

2. Consideremos ahora el conjunto $A = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$. Mostraremos que A es denso en $\mathbb{Q}$. Sean $r < s$ dos racionales cualesquiera. Sea $t = \frac{r+s}{2}$. Si $t \in A$, entonces no tenemos nada mas que mostrar pues $r < t < s$. En caso que $t \notin A$, se tiene que $t = 3$ y en este caso tomamos $u = \frac{3+s}{2}$. El lector deberá convencerse que $r < u < s$ y $u \in A$.

[3] Compare el significado que le estamos dando a la palabra denso con el que tiene en frases como "la densidad de población", "la densidad es igual a la masa sobre el volumen".

3. Analicemos ahora el siguiente conjunto

$$\left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\},$$

que denotaremos con la letra B. Le sugerimos al lector que represente algunos de los elementos de B sobre un recta. Observará que quedan mucho "huecos" donde no hay elementos de B. Por ejemplo, ningún elemento de B está estrictamente entre $1/2$ y 1. En efecto, si $1/2 < \frac{1}{n+1} < 1$, entonces $n+1 < 2$ y a la vez $n+1 > 1$. Lo cual es imposible. En conclusión B no es denso.

□

> Sea A un subconjunto de $\mathbb{Q}$
>
> Para mostrar que A no es denso debemos encontrar dos racionales $r < s$ tal que ningún elemento de A esté entre r y s.
>
> Para mostrar que A es denso debemos garantizar que para cualquier par de racionales $r < s$, existe un elemento de A entre ellos.

Mostraremos a continuación que entre dos racionales cualesquiera existen tanto racionales como un desee, de hecho existe entre ellos una cantidad infinita de racionales.

Proposición 1.28. *Para todo $r, s \in \mathbb{Q}$ con $r < s$ y todo natural $n \geq 1$ existen racionales $t_1, t_2, \cdots, t_n$ tales que*

$$r < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < s$$

Demostración: Fijemos $r < s$ racionales cualesquiera. La demostración la haremos por inducción.

Base de la inducción: Para $n = 1$ el resultado es cierto pues es lo que probamos en el teorema 1.25.

Paso inductivo: Supongamos que es válido para $n = k$ y lo mostraremos para $n = k+1$. La hipótesis inductiva nos asegura que existen racionales $t_1, t_2, \cdots, t_k$ tales que

$$r < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < s$$

Por el teorema 1.25 aplicado a t_k y s sabemos que existe otro racional u tal que $t_k < u < s$. Tomemos entonces $t_{k+1} = u$.

□

Los subconjuntos densos de $\mathbb{Q}$ se parecen mucho a $\mathbb{Q}$. Dejaremos como ejercicio al lector mostrar que la proposición anterior también es válida para los subconjuntos densos de $\mathbb{Q}$ (vea el ejercicio 15).

Ejemplo 1.29. Sea $D = \mathbb{Q}\setminus\{1,2,3\}$. Mostraremos que D es denso. Sean r y s dos racionales cualesquiera con $r < s$. Por la proposición 1.28 con r, s y $n = 4$ existen 4 racionales t_1, t_2, t_3 y t_4 tales que

$$r < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < s.$$

Como el conjunto $\{1,2,3\}$ tiene 3 elementos, entonces al menos uno de los racionales t_1, t_2, t_3, t_4 pertenece a D. Con esto hemos mostrado que existe $t \in D$ tal que $r < t < s$.

□

Ejemplo 1.30. Sea $D = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$. Mostraremos que D es denso. Sean r y s dos racionales cualesquiera con $r < s$. Entre r y s hay, a lo sumo, una cantidad finita de naturales. Más formalmente, consideremos el conjunto

$$F = \{n \in \mathbb{N} : \, r < n < s\}.$$

Dejamos al lector convencerse que F es finito (esto incluye la alternativa que F sea vacío). Digamos que F tiene k elementos. Por la proposición 1.28 con r, s y $n = k+1$ existen $k+1$ racionales $t_1, \cdots, t_{k+1}$ tales que

$$r < t_1 < t_2 < \cdots < t_{k+1} < s.$$

Como el conjunto F tiene k elementos, entonces al menos uno de los racionales $t_1, \cdots, t_{k+1}$ pertenece a D. Con esto hemos mostrado que existe $t \in D$ tal que $r < t < s$.

□

1.6.1. El juego $\forall\ \exists$

Escribamos la definición de conjunto denso en la notación de la lógica simbólica. Sea $A \subseteq \mathbb{Q}$, entonces A es denso si la siguiente proposición es verdadera:

$$\forall s \in \mathbb{Q}\ \forall r \in \mathbb{Q}\ [\, r < s \ \rightarrow\ \exists t \in A\ (\, r < t < s)]. \tag{1.2}$$

Una característica de la proposición anterior es que tiene los dos cuantificadores, $\forall$ y $\exists$, y además aparecen es ese orden, primero aparece dos veces el cuantificador $\forall$ y después $\exists$. La verificción de la validéz de una proposición de este tipo se puede entender en términos de un juego entre dos jugadores. El primer jugador (que llamaremos $\forall$) juega de primero y se encarga de darle valores a las variables que están cuantificadas universalmente. El segundo jugador (que llamaremos $\exists$) juega después de $\forall$ y se le corresponde dar valores a las variables que están existencialmente cuantificadas. En el caso particular que nos ocupa, la validéz de (1.2), el jugador $\forall$ le da valores a r y s y el jugador $\exists$ le asigna valores a t.

Una partida de este juego se puede representar con una tabla. Un ejemplo concreto es el siguiente. El jugador $\forall$ asigna $r = 3$ y $s = 5$ y el jugador $\exists$ responde con $t = 7/2$.

$\forall$		$\exists$
r	s	t
3	5	
		7/2

Diremos que el jugador $\exists$ gana esta partida si la respuesta t que él juega pertenece al conjunto A. En caso contrario, diremos que $\forall$ gana la partida. El juego consiste en la lista de todas las partidas posibles.

Por ejemplo, considere

$\forall$		$\exists$
r	s	t
3	5	
		$7/2$
4	$9/2$	
		$17/4$
$-7/9$	$-13/18$	
		$-26/36$
$\vdots$	$\vdots$	
		$\vdots$

El conjunto D es denso si no importa como juegue el jugador $\forall$ es posible para el jugador $\exists$ jugar de tal manera que gane todas las partidas.

1.6.2. Un ejemplo de subconjunto denso de $\mathbb{Q}$

El objetivo principal de esta sección es mostrar que el siguiente subconjunto de $\mathbb{Q}$ es denso

$$\left\{\frac{m}{10^n} : \ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

¿Cuáles racionales pertenecen a este conjunto? Precisamente aquellos que tienen expansión decimal finita (no periódica).

Para lograr nuestro objetivo necesitamos mostrar primero un resultado auxiliar que es interesante en si mismo.

Proposición 1.31. *(i) Sean r y s dos racionales con $r > 0$, existe un natural n tal que $s < nr$.*

(ii) Para todo racional $r > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/n < r$.

(iii) Para todo racional $r > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{10^n} < r$.

Demostración:

(i) Si $s \leq 0$, entonces basta tomar $n = 1$. Suponga entonces que $s > 0$. Como $s \cdot r^{-1} > 0$, entonces existen enteros positivos p y q tales que $s \cdot r^{-1} = p/q$. Como $1 \leq q$ entonces $p/q \leq p$. En consecuencia, $s \cdot r^{-1} \leq p$ y despejando s obtenemos que $s < pr$.

(ii) Fijemos un racional $r > 0$. Tome $s = 1$ y use la parte (i) para concluir que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 < nr$. Por lo tanto, $0 < 1/n < r$.

(iii) Usaremos que $n \leq 10^n$ para todo $n \geq 1$ (esto se demuestra por inducción y lo dejaremos a cargo del lector). En particular esto dice que
$$\frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{n}.$$
Ahora bien, dado $r > 0$ racional, por lo probado en la parte (ii), sabemos que existe un natural n tal que $1/n < r$. Como $n \leq 10^n$ tenemos que
$$\frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{n} < r.$$
□

Ya tenemos lo que nos hace falta para mostrar lo indicado al comienzo de esta sección.

Proposición 1.32. *Dados $s, r \in \mathbb{Q}$ con $r < s$, existe $m \in \mathbb{Z}$ y $p \in \mathbb{N}$ tales que $r < \frac{m}{10^p} < s$. En consecuencia, el siguiente conjunto es denso en $\mathbb{Q}$:*
$$\left\{ \frac{m}{10^n} : \; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Demostración: Primero supondremos que $r > 0$. Por la parte (iii) de la proposición 1.31 sabemos que existe un natural p tal que
$$\frac{1}{10^p} < s - r. \tag{1.3}$$
Por la parte (i) de la proposición 1.31, existe un n tal que $r10^p < n$. Esto muestra que el siguiente conjunto no es vacío
$$B = \{n \in \mathbb{N} : \; r < \frac{n}{10^p}\}.$$
El principio de buena ordenación nos garantiza que B tiene un primer elemento el cual denotaremos con la letra m.

Afirmamos que
$$r < \frac{m}{10^p} < s. \tag{1.4}$$
La primera desigualdad es obvia por el hecho que m pertenece a B. La segunda desigualdad la mostraremos por reducción al absurdo. Supongamos que $s \leq \frac{m}{10^p}$. Por ser m el primer elemento de B tenemos que $m - 1 \notin B$. Pero observe que $m - 1 \geq 0$ pues $r > 0$, por lo tanto la razón para que $m - 1$ no pertenezca a B es que $\frac{m-1}{10^p} \leq r$. De lo anterior se deduce que
$$\frac{m-1}{10^p} \leq r < s \leq \frac{m}{10^p}.$$
De esta desigualdad se concluye que
$$s - r \leq \frac{m}{10^p} - \frac{m-1}{10^p} = \frac{1}{10^p}.$$
Lo que contradice que p satisface (1.3). Con esto hemos mostrado (1.4.

Nos queda por analizar el caso $r \leq 0$, pero como el lector probablemente sospecha, lo dejaremos como ejercicio (ver ejercicio 13). □

Ejercicios 1.6

1. En cada uno de los ejercicios siguientes halle dos racionales estrictamente entre los racionales indicados:
   (a) $\dfrac{2}{3}$ y $\dfrac{7}{9}$, (b) $\dfrac{15}{7}$ y $\dfrac{34}{9}$, (c) $-\dfrac{4}{5}$ y $-\dfrac{6}{9}$, (d) $\dfrac{6}{18}$ y $\dfrac{7}{14}$.

2. Sean a, b, c, d enteros con $b > 0$ y $d > 0$. Muestre que si $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$, entonces $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$.

   ¿Que tiene que ver este resultado con el teorema 1.25?

3. Determine cuales de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{Q}$. Justifique su respuesta.

   a) $\mathbb{Q} \setminus \{7, 8, 10, 25\}$
   b) $\{r \in \mathbb{Q} : \ r \leq 6\} \cup \{r \in \mathbb{Q} : \ 10 \leq r\}$
   c) $\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 10, 11, 12\}$
   d) $\mathbb{N}$
   e) $\{\frac{1}{2^n} : \ n \in \mathbb{N}\}$
   f) $\{\pm\frac{1}{2^n} : \ n \in \mathbb{N}\}$
   g) $\{m \pm \frac{1}{n} : \ m, n \in \mathbb{Z} \text{ y } n > 0\}$
   h) $\{m \pm \frac{1}{2^n} : \ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
   i) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

4. Lea de nuevo la demostración del teorema 1.25 y determine si se puede usar $\dfrac{s+r}{3}$ en lugar de $\dfrac{s+r}{2}$.

5. Determine si la condición (*) es necesaria para que un subconjunto $D \subseteq \mathbb{Q}$ sea denso:

   (*) Para todo $r, s \in \mathbb{Q}$ se tiene que $\dfrac{r+s}{2} \in D$.

   Es decir, determine si un conjunto denso D de $\mathbb{Q}$ necesariamente satisface (*).

6. Sean r, s dos racionales con $r < 0$. Muestre que existe un natural n tal que $nr < s$.

7. *a*) Sea r un racional positivo. Muestre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 25/n < r$.
   b) Sea a un entero positivo y r un racional positivo. Muestre existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{a}{n} < r$.
   c) Enuncie un resultado más general que el de la parte (b).

8. Muestre que para todo racional $r > 0$ existe un natural n tal que $r > \frac{n}{n^2+1}$.

9. Sea a un entero con $a \geq 2$. Muestre por inducción que $m \leq a^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

10. Sea $r \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{N}$ con $n > 0$. Muestre que existe un único entero m tal que $\frac{m}{n} < r \leq \frac{m+1}{n}$.

11. En los siguientes ejercicios damos dos racionales r y s con $r < s$ y le pedimos hallar un natural n que satisfaga la conclusión del teorema 1.31, es decir, tal que $s < nr$.

    (a) $\frac{2}{3} < \frac{7}{9}$, (b) $\frac{3}{2} < \frac{15}{6}$, (c) $\frac{5}{32} < \frac{25}{4}$, (d) $\frac{12}{13} < 7$.

12. Para cada uno de los pares de racionales del ejercicio 11 halle un racional de la forma $\frac{m}{10^n}$ como en la conclusión de la proposición 1.32.

13. Complete la demostración de 1.32. Ya mostramos que la conclusión de 1.32 se cumple para $r > 0$. Muéstrela para $r \leq 0$. (*Sugerencia:* El caso $r = 0$ ya fué analizado en la parte (iii) de la proposición 1.31. Quedan otros casos a considerar: (a) $r < 0 \leq s$. Este caso es fácil de tratar usando la proposición 1.31. (b) Suponga $r < s < 0$ y observe que $0 < -s < -r$. Ahora use el hecho que para racionales positivos ya lo probamos).

14. Sean $D \subseteq E \subseteq \mathbb{Q}$. Muestre que si D es denso en $\mathbb{Q}$, entonces E también es denso en $\mathbb{Q}$.

15. Sea $D \subseteq \mathbb{Q}$ denso. Para todo $r, s \in \mathbb{Q}$ con $r < s$ y todo natural $n \geq 1$ muestre que existen racionales $t_1, t_2, \cdots, t_n$ en D tales que

$$r < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < s$$

    Sugenrecia: Modifique la demostración de la proposición 1.28.

16. Sea D un conjunto denso en $\mathbb{Q}$. Muestre que $D \setminus \{a\}$ es denso en $\mathbb{Q}$ para todo $a \in D$. Muestre que si $F \subset D$ es finito, entonces $D \setminus F$ es denso en $\mathbb{Q}$.

17. Sea a un entero con $a \geq 2$ y defina D_a de la manera siguiente

$$D_a = \left\{ \frac{m}{a^n} : m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \geq 0 \right\}.$$

    a) Muestre que D_a es denso en $\mathbb{Q}$ (*Sugerencia:* Siga los pasos de la demostración de la proposición 1.32 y cuando haga falta use el ejercicio 9).
    b) Muestre que si $a|b$, entonces $D_a \subseteq D_b$.
    c) Muestre que $mcd(a, b) = 1$ si, y sólo si, $D_a \cap D_b = \mathbb{Z}$.

18. En este ejercicio mostraremos que existen dos subconjuntos de $\mathbb{Q}$ disjuntos y ambos densos.

    a) Muestre que si $D \subseteq \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{Q}$, entonces $D - \mathbb{Z}$ también es denso en $\mathbb{Q}$.
    b) Use (a) y el ejercicio 17 para mostrar que existen $D, E \subseteq \mathbb{Q}$ densos en $\mathbb{Q}$ con $D \cap E = \emptyset$.

19. Un subconjunto $D \subseteq \mathbb{Q}$ se dice que es **denso en sí mismo** si satisface la siguiente propiedad: Para todo $a, b \in D$ con $a < b$ existe $c \in D$ tal que $a < c < b$.

a) Muestre que todo subconjunto de $\mathbb{Q}$ que sea denso en $\mathbb{Q}$ es denso-en-sí-mismo.

b) Sea $D = \{r \in \mathbb{Q} : 1 < r < 2 \text{ ó } 3 < r < 4\}$. Muestre que D es denso-en-sí-mismo pero no es denso en $\mathbb{Q}$.

c) De otro ejemplo de un subconjunto de $\mathbb{Q}$ que sea denso-en-sí-mismo pero que no sea denso en $\mathbb{Q}$.

Capítulo 2

Los Números Reales

El conjunto de los números reales se denota con la letra $\mathbb{R}$. En este capítulo estudiaremos algunas de sus propiedades. Primero que todo recordemos que los naturales, los enteros y los racionales son todos números reales, es decir,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Los números reales se identifican con los puntos de una recta y es frecuente referirse a $\mathbb{R}$ como la *linea real*. Esta interpretación geométrica de $\mathbb{R}$ permite asociar a cada segmento de la recta real un número real (su longitud) y viceversa, cada número real se puede identificar con la longitud de un segmento.

La propiedad que distingue a los números reales de los racionales se conoce como el *Axioma de Completitud*. Esta propiedad es crucial para la identificación de $\mathbb{R}$ con una recta. Por ejemplo, si r es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de lado 1, entonces el teorema de Pitágoras nos asegura que $r^2 = 2$. Sin embargo, como lo mostramos anteriormente, r no es un número racional. En particular esto dice que las propiedades **P1,. . . , P12**, que satisfacen los números racionales, no son suficientes para garantizar que la ecuación $r^2 - 2 = 0$ tenga solución. Agregando el axioma de completitud como una propiedad adicional podemos mostrar que esa ecuación tiene solución, precisamente $\sqrt{2}$. Este capítulo está dedicado al estudio del axioma de completitud.

Pensar los números reales como puntos de una recta es conveniente para algunas cosas, pero no lo es tanto cuando se trata del cálculo avanzado o del análisis matemático, pues para el desarrollo de esta ramas de la matemáticas es fundamental el enfoque mas abstracto basado en el axioma del completitud. Entonces, ¿Qué es un número real? Esta pregunta ha recibido varias respuestas equivalentes. En §5.11 presentaremos una construcción de $\mathbb{R}$ basada en el concepto de cortadura de Dedekind.

2.1. Las propiedades básicas de $\mathbb{R}$

Comenzaremos enunciando las propiedades **P1,. . . , P12** ahora para los números reales. Denotaremos con el símbolo $\mathbb{R}^+$ al conjunto de los números reales positivos.

P1 $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ (*Ley asociativa para la suma*).

P2 $a + b = b + a$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ (*Ley conmutativa para la suma*).

P3 Existe un elemento de $\mathbb{R}$ denotado por 0 tal que $a+0 = a$ para todo a en $\mathbb{R}$ (*Existencia de elemento neutro para la suma*).

P4 Para cada $a \in \mathbb{R}$ existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $a + b = 0$ (*Existencia de elemento inverso con respecto a la suma*).

P5 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ para todo a, b, c en $\mathbb{R}$ (*Ley asociativa para la multiplicación*).

P6 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ para todo a, b, c en $\mathbb{R}$ (*Ley distributiva para la suma y la multiplicación*).

P7 $a \cdot b = b \cdot a$ para todo a, b en $\mathbb{R}$ (*Ley conmutativa para la multiplicación*).

P8 Existe un elemento de $\mathbb{R}$, que denotamos con 1, tal que $1 \neq 0$ y $a \cdot 1 = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$ (*Existencia de elemento neutro para la multiplicación*).

P9 (Ley de Tricotomía) Para todo número real a se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

1. $a = 0$.
2. $a \in \mathbb{R}^+$.
3. $-a \in \mathbb{R}^+$.

P10 Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $a + b \in \mathbb{R}^+$.

P11 Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$.

P12 Dado $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, existe un $b \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot b = 1$ (*Existencia de elemento inverso con respecto a la multiplicación*).

Sabemos además que a partir de **P1,. . . , P12** se demuestra que los elementos inversos para la suma y la multiplicación dados por **P4** y **P8** son únicos y se denotan por $-a$ y a^{-1} respectivamente. En el siguiente teorema se enuncian las consecuencias mas usadas de **P1,. . . , P12**.

Teorema 2.1. *(*Leyes de cancelación*) Sean $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Se cumple que*
(i) Si $x + z = y + z$, entonces $x = y$.
(ii) Si $xw = yw$ y $w \neq 0$, entonces $x = y$. □

Teorema 2.2. *Sean $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ con $z \neq 0 \neq w$. Tenemos que*

1. $x \cdot 0 = 0$
2. $-(-x) = x$
3. $(w^{-1})^{-1} = w$

4. $(-1) \cdot x = -x$

5. $x \cdot (-y) = -(x \cdot y) = (-x) \cdot y$

6. $-(x + y) = (-x) + (-y)$

7. $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

$\square$

El orden de $\mathbb{R}$ se define de manera análoga a como lo hiciéramos en $\mathbb{Q}$.

Definición 2.3. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Escribiremos $a < b$ cuando ocurra que $b - a \in \mathbb{R}^+$. Además convenimos es escribir*
(i) $a > b$, si $b < a$
(ii) $a \leq b$, si $a = b$ o $a < b$.
(iii) $a \geq b$, si $b \leq a$.

Las propiedades mas usadas de la relación de orden las enunciamos en el teorema siguiente

Teorema 2.4. *Para todo $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ tenemos*

1. (Transitividad) *Si $x < y$ e $y < z$, entonces $x < z$*

2. (Linealidad del orden) *Se cumple una, y sólo una, de las siguientes afirmaciones:*
   (i) $x = y$, (ii) $x < y$, (iii) $y < x$.

3. *Si $x < y$, entonces $x + z < y + z$.*

4. *Si $z > 0$ y $x < y$, entonces $xz < yz$.*

5. *Si $z < 0$ y $x < y$, entonces $xz > yz$.*

6. *$z > 0$ si, y sólo si $1/z > 0$.*

7. *$0 < x < y$ si, y sólo si $0 < 1/y < 1/x$.*

8. *Si $x \leq y$ y $w \leq z$, entonces $x + w \leq y + z$.*

$\square$

2.2. El axioma de completitud

La siguiente definición es crucial para enunciar el axioma de completitud.

Definición 2.5. *Un conjunto A de números reales se dice que es **acotado superiormente** si existe un número real c tal que $x \leq c$ para todo $x \in A$. Un número c con esta propiedad se dice que es una **cota superior** de A.*

Ejemplo 2.6. Considere el siguiente conjunto de números reales.

$$A = \{r \in \mathbb{R} : \ r < 5\}.$$

Tenemos que 5 es una cota superior de A. Además todo número real mayor que 5 también es una cota superior de A. Por ejemplo $\frac{11}{2}$ y 6 son cotas superiores de A. □

Definición 2.7. *Dado un conjunto A de números reales acotado superiormente, diremos que un número real c es una **cota superior mínima** de A si se cumplen las dos condiciones siguientes:*
(i) c es una cota superior de A.
(ii) Si d es una cota superior de A, entonces $c \leq d$.

Si A tiene una cota superior mínima entonces ella es única. En efecto, si c y c' son cotas superiores mínimas de A, es claro de la definición que $c \leq c'$ y también que $c' \leq c$. Luego por la Ley de Tricotomía tenemos que $c = c'$.

En el caso que A admita una cota superior mínima c, diremos que c es el **supremo** de A y escribiremos

$$c = \sup A.$$

Cuando haga falta para evitar ambigüedades también escribiremos $\sup(A)$.

Diremos que c es el **máximo** de A si $c \in A$ y c es una cota superior de A. Notemos que si c es el máximo de A, entonces c es el supremo de A. En otras palabras, un conjunto tiene máximo si, y sólo si, el conjunto tiene supremo y además el supremo pertenece al conjunto.

Ejemplo 2.8.

1. Considere el conjunto siguiente:

   $$A = \{r \in \mathbb{R} : \ r \leq 5\}.$$

   Es claro que 5 es una cota superior de A y además 5 pertenece a A. Luego 5 es el máximo y por lo tanto 5 también es el supremo de A.

2. Consideremos ahora el conjunto:

   $$B = \{1 - \frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}.$$

   Observemos que para todo $b \in B$ se tiene que $b \leq 1$. Así que B es acotado superiormente. Por otra parte $1 \notin B$ (¿por qué?). No es difícil convencerse que 1 debe ser el supremo de B, sin embargo, para mostrarlo formalmente necesitaremos conocer mas sobre los números reales.

   Pero si podemos mostrar que B no tiene máximo. En efecto, observemos que

   $$1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$$

   para todo natural $n \geq 1$ (verifíquelo!). Esto indica que ningún elemento de B es mayor que todos los otros elementos de B.

□

Ahora bien, ¿será cierto que todo conjunto de números reales acotado superiormente tiene supremo? La respuesta es afirmativa, sin embargo no es posible deducirla de las propiedades de los números reales vistas hasta ahora: **P1**, ..., **P12**. Por esta razón se introduce la siguiente propiedad que se conoce como el *axioma de completitud* o *axioma del supremo.*

P13 (*Axioma de Completitud*) Todo conjunto no vacío de números reales que sea acotado superiormente tiene supremo.

De manera análoga definiremos los conceptos de cota inferior y cota inferior máxima.

Definición 2.9. *Un conjunto A de números reales se dice que es* ***acotado inferiormente*** *si existe un número real c tal que para todo $x \in A$, se cumple que $c \leq x$. Un número real c con esta propiedad se dice que es una* ***cota inferior*** *de A.*

Definición 2.10. *Dado un conjunto A de números reales acotado inferiormente, diremos que un número real c es una* ***cota inferior máxima*** *de A si se cumplen las dos condiciones siguientes:*
(i) c es una cota inferior de A.
(ii) Si d es una cota inferior de A, entonces $d \leq c$.

Si A tiene una cota inferior máxima, entonces ella es única (¿por qué?). En el caso que A admita una cota inferior máxima c, diremos que c es el **ínfimo** de A y escribiremos

$$c = \text{ínf}\, A.$$

También escribiremos $\text{ínf}(A)$ cuando haga falta para evitar ambigüedades.

Diremos que c es el **mínimo** de A si $c \in A$ y c es una cota inferior de A. Notemos que c es el mínimo de A si, y sólo si, $c \in A$ y c es el ínfimo de A.

El axioma de completitud implica que todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente tiene un ínfimo.

Teorema 2.11. *Todo conjunto de números reales no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo.*

Demostración: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Sea

$$B = \{y : \ y \text{ es una cota inferior de } A\}.$$

Por hipótesis B no es vacío. Por otra parte, mostraremos que cualquier $x \in A$ es una cota superior de B: en efecto, dado $x \in A$ por definición de ínfimo se tiene que $y \leq x$ para todo $y \in B$. Por el axioma de completitud B tiene supremo. Sea c el supremo de B. Mostraremos que c es el ínfimo de A. Tenemos que mostrar dos cosas:

1. *c es una cota inferior de A.* Sea $x \in A$. Ya mostramos que x es una cota superior de B. Luego, como c es el supremo de B, se tiene que $c \leq x$.

2. *c es la mayor de la cotas inferiores de A.* Sea d otra cota inferior de A, es decir, $d \in B$. Como c es el supremo de B, se tiene que $d \leq c$.

□

Veremos en seguida que el principio de buena ordenación de $\mathbb{N}$ ahora puede ser deducido del axioma del supremo. Observe el lector que para el estudio de los números enteros y racionales se incluyó este principio como una propiedad más de $\mathbb{Z}$ junto con **P1**, ..., **P12**.

Teorema 2.12. *(Principio de buena ordenación) Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$. Entonces A tiene un elemento mínimo.*

Demostración: Como A está acotado inferiormente por 0, entonces del teorema 2.11 concluimos que A tiene ínfimo. Sea

$$k = \inf A.$$

Mostraremos que $k \in A$. De la definición de ínfimo, sabemos que $k + 1/2$ no es una cota inferior de A, en consecuencia existe $n \in A$ tal que

$$k \leq n < k + \frac{1}{2}.$$

De esto se concluye que si m es un natural con $m < n$, entonces

$$m \leq n - 1 < k - \frac{1}{2} < k$$

y en consecuencia $m \notin A$. Por lo tanto, n es el mínimo de A y así $k = n$.

□

Ejercicios 2.2

1. Determine si los siguientes conjuntos son acotados inferiormente y/o superiormente y si tienen máximo y/o mínimo y en caso de tenerlo diga cúal es.

   a) $A = \{\frac{m}{n} : \ m, n \in \mathbb{Z} \ , \ \ m \geq 5 \ \text{ y } \ n \geq 5\}$
   b) $B = \{\frac{m}{n} : \ m, n \in \mathbb{Z} \ , \ \ m \geq 5 \ \text{ y } \ 1 \leq n \leq 5\}$
   c) $C = \{\frac{m}{n} : \ m, n \in \mathbb{Z} \ , \ \ 1 \leq m \leq 5 \ \text{ y } \ n \geq 5\}$
   d) $D = \{\frac{m}{n} : \ m, n \in \mathbb{Z} \ , \ \ 1 \leq m \leq 5 \ \text{ y } \ 1 \leq n \leq 5\}$
   e) $E = \{\frac{m}{m+1} : \ m \in \mathbb{Z} \ , \ \ 0 \leq m\}$
   f) $F = \{\frac{m+1}{m} : \ m \in \mathbb{Z} \ , \ \ 0 < m\}$
   g) $G = \{\frac{m}{m+1} : \ m \in \mathbb{Z} \ , \ \ m < -1\}$
   h) $H = \{\frac{n^2}{n^2+1} : \ n \in \mathbb{Z}\}$
   i) $I = \{\frac{3n^2}{2n^2+1} : \ n \in \mathbb{Z}\}$
   j) $J = \{\frac{4n+7}{5n+2} : \ n \in \mathbb{N}\}$
   k) $K = \{\frac{4n+7}{5n-2} : \ n \in \mathbb{N}\}$
   l) $L = \{\frac{4n+7}{5n-2} : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{4n+7}{5n+2} : \ n \in \mathbb{N}\}$

m) $M = \{\frac{n}{2n^2-1} : \ n \in \mathbb{N}\}$

n) $N = \{\frac{n-1}{7-n^2} : \ n \in \mathbb{N}\}$

2. Determine si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son (i) acotados superiormente y (ii) acotados inferiormente, en caso que lo sean, hallar su supremo y su ínfimo. Determine si tienen máximo y/o mínimo.

   a) $\mathbb{R}$

   b) $\{x \in \mathbb{R} : \ 3 \leq x < 8\}$

   c) $\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 + 2x + 1 \geq 0\}$

   d) $\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 + 2x - 3 \geq 0\}$ (*Sugerencia:* Note que $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$)

   e) $\{x \in \mathbb{R} : \ z \in \mathbb{Z} \text{ y } z \leq \frac{11}{3}\}$

3. a) Sea $A \subseteq \{x \in \mathbb{R} : \ 2 < x < 5\}$ con $A \neq \emptyset$ ¿Es A acotado superiormente?

   b) Sea $A \subseteq \{x \in \mathbb{R} : \ x < 2\}$ con $A \neq \emptyset$ ¿Es A acotado inferiormente?

4. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, designaremos con $-A$ al conjunto

$$\{-r \in \mathbb{R} : \ r \in A\}.$$

   Halle $-A$ en cada uno de los siguientes ejercicios:

   a) $A = \{2, -3, \frac{2}{3}, 5\}$

   b) $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x < 2\}$

   c) $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 2\}$.

   d) $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq 3\}$

   e) $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 3\}$

   f) $A = \{x \in \mathbb{R} : \ 3 < x < 4\}$.

5. Dados dos subconjuntos no vacíos A, B de $\mathbb{R}$ definimos los conjuntos $A + B$ y $A \cdot B$ como sigue:

$$A + B = \{a + b : a \in A, \ b \in B\} \quad A \cdot B = \{ab : a \in A, \ b \in B\}$$

   Por ejemplo, si $A = \{-1, 2\}$ y $B = \{4, 5, 7\}$, entonces

$$A + B = \{-1 + 4, -1 + 5, -1 + 7, 2 + 4, 2 + 5, 2 + 7\} = \{3, 4, 6, 7, 9\}$$

   y análogamente

$$A \cdot B = \{-4, -5, -7, 8, 10, 14\}$$

   En cada uno de los siguientes ejercicios determine $A + B$ y $A \cdot B$.

   a) $A = \{1, 2\}$ y $B = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{-2}{9}\}$

b) $A = \{2\}$ y $B = \mathbb{N}$
c) $A = \{1\}$ y $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\}$
d) $A = \mathbb{Z}$ y $B = \{-1\}$
e) $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$ y $B = \{\frac{1}{2}\}$
f) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 3\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$
g) $A = B = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$
h) $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : 3 < x < 4\}$

6. a) En cada uno de los conjuntos del ejercicio 5 determine si los conjuntos A, B, $A+B$ y $A \cdot B$ son acotados superiormente y en caso que lo sean hallar $\sup A$, $\sup B$, $\sup(A+B)$ y $\sup(A \cdot B)$.
   b) Dados tres subconjuntos A, B, C de $\mathbb{R}$ ¿Es cierto que $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$?

7. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B = A \backslash [0,1]$. Suponga que B es acotado superiormente y que $\sup(B) \leq 0$. Muestre que A es acotado superiormente y que $\sup(A) \leq 1$.

8. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B = A \setminus [0,1]$. Suponga que B es acotado inferiormente y que $\inf(B) \geq 1$. Muestre que A es acotado inferiormente y que $\inf(A) \geq 0$.

9. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $c < d$. Los intervalos (a, b), $(-\infty, a)$ y $(a, +\infty)$ se definen de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} (a,b) & = & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\ (-\infty, a) & = & \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \\ (a, +\infty) & = & \{x \in \mathbb{R} : a < x\}. \end{array}$$

Usando la noción de suma de conjuntos del ejercicio 5, muestre que

(i) $(a, +\infty)\ +\ (c, +\infty) = (a + c, +\infty)$
(ii) $(-\infty, a)\ +\ (-\infty, c) = (-\infty, a + c)$
(iii) $(a, b)\ +\ (c, d) = (a + c, b + d)$

10. Sea r un real positivo. Considere los siguiente conjuntos:

$$E \ = \ \{x \in \mathbb{R} :\ x = (1 + a)r \ \text{ para algún real } a > 0.\}$$

$$F \ = \ \{x \in \mathbb{R} :\ x = \frac{r}{1 - b} \ \text{ para algún real } b \text{ con } 0 < b < 1.\}$$

   a) Determine si $E \subseteq D$ o $D \subseteq E$ o $E = D$.
   b) ¿Es E igual al intervalo $(r, +\infty)$?

11. Considere los siguientes conjuntos:

$$\begin{array}{rcl} E & = & \{x \in \mathbb{R} : \exists a, b \in \mathbb{R}\ (a < x < b \leq 2)\} \\ F & = & \{x \in \mathbb{R} :\ \exists a \in \mathbb{R}\ (a < x < 2)\} \\ G & = & \{x \in \mathbb{R} :\ x < 2\} \end{array}$$

Determine que relación guardan entre sí. ¿Serán iguales entre sí?

2.3. La propiedad Arquimediana

En esta sección mostraremos que los números reales satisfacen el **principio de Arquímedes**. Este principio es equivalente al hecho que los naturales no son acotados superiormente en $\mathbb{R}$. Con estas herramientas a nuestra disposición podremos dar ejemplos más interesantes de conjuntos acotados.

Teorema 2.13. *$\mathbb{N}$ no es acotado superiormente en $\mathbb{R}$.*

Demostración: Daremos una prueba indirecta por reducción al absurdo. Supongamos que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente. Por el axioma de completitud $\mathbb{N}$ tiene supremo. Sea c el supremo de $\mathbb{N}$. Como $c-1<c$, entonces $c-1$ no es una cota superior de $\mathbb{N}$. Luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c-1<n_0$. De esto último se obtiene que $c<n_0+1$ y como $n_0+1 \in \mathbb{N}$, entonces c no sería una cota superior de $\mathbb{N}$, lo cual es una contradicción.

□

Teorema 2.14. *(Propiedad Arquimediana) Dados $r, s \in \mathbb{R}$ y $r>0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s<nr$.*

Demostración: Sean r, s reales con $r>0$. Como $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente tenemos que $s \cdot r^{-1}$ no es una cota superior de $\mathbb{N}$. Por lo tanto existe un natural n tal que

$$s \cdot r^{-1} < n.$$

Multiplicando por r ambos lados (recuerde que $r>0$) obtenemos el resultado deseado. □

La propiedad Arquimediana tiene una interpretación geométrica sencilla. Dice que dados dos segmentos arbitrarios de longitudes s y r respectivamente, podemos obtener otro segmento de longitud mayor que s si concatenamos el segmento de longitud r un número suficiente de veces (es decir, si los colocamos alineados uno después del otro). ¿Cuál es ese número suficiente de veces? Esto depende por supuesto de s y r. Por ejemplo, para $s=\frac{14}{9}$ y $r=\frac{1}{3}$ ¿cuántas veces se requiere repetir un segmento de longitud $\frac{1}{3}$ para obtener otro de longitud mayor que $\frac{14}{9}$? Es claro que $s \leq 14r$, pero podemos obtener un resultado mas preciso, en efecto, como $\frac{14}{9} < 5\frac{1}{3}$ bastaría repetir 5 veces el segmento de longitud $\frac{1}{3}$.

El siguiente resultado, que se usa con bastante frecuencia, es análogo a la proposición 1.31.

Corolario 2.15. *Sea $r \in \mathbb{R}$ con $0<r$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n}<r$.*

Demostración: Sea r un real positivo. Por la propiedad Arquimediana 2.14 usada para $s=1$ obtenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1<nr$. Es decir, $1/n<r$ como se requería.

□

Ejemplo 2.16. Ahora podemos completar el ejemplo 2.8 mostrando que 1 es el supremo del conjunto

$$A=\{1-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

En efecto, ya vimos que 1 es una cota superior de A. Veremos que 1 es la menor de las cotas superiores. Para hacerlo basta mostrar que dado $t < 1$, existe $x \in A$ tal que $t < x$ pues esto probaría que t no es una cota superior de A y por consiguiente 1 es la menor de todas. Sea $t < 1$, entonces $1 - t > 0$, luego por el corolario 2.15 existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n_0} < 1 - t.$$

Luego

$$t < 1 - \frac{1}{n_0}.$$

Para concluir el argumento, note que $1 - \frac{1}{n_0} \in A$.

Obsérvese que 1 no pertenece a A. En general, el supremo de un conjunto no tiene que ser un elemento del conjunto en cuestión.

□

Ejemplo 2.17. Consideremos el siguiente conjunto

$$A = \left\{ \frac{3n+5}{7n+8} : \; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Veamos algunos de los elementos de A haciendo una tabla

n	$\frac{3n+5}{7n+8}$
0	5/8
1	8/15
2	11/22
3	14/29
4	17/36
5	20/43

Notemos que los números en la columna de la derecha van decreciendo. Por ejemplo, tenemos que $5/8 > 8/15 > 11/22$. De hecho se tiene que la sucesión

$$\left\{ \frac{3n+5}{7n+8} \right\}_{n \geq 0}$$

es *decreciente*. Es decir, a medida que n aumenta $\frac{3n+5}{7n+8}$ disminuye, o mas precisamente,

$$\frac{3n+5}{7n+8} > \frac{3(n+1)+5}{7(n+1)+8} \quad \text{para todo natural } n.$$

En efecto, tenemos que $7n+8$ y $7n+15$ son positivos para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\tfrac{3n+5}{7n+8} > \tfrac{3(n+1)+5}{7(n+1)+8} \quad &\Leftrightarrow \quad (3n+5)(7(n+1)+8) > (3(n+1)+5)(7n+8) \\
&\Leftrightarrow \quad 21n(n+1) + 24n + 35(n+1) + 20 \; > \\
&\qquad\; 21n(n+1) + 35n + 24(n+1) + 40 \\
&\Leftrightarrow \quad 69n + 35 > 69 + 24 \\
&\Leftrightarrow \quad 35 > 24.
\end{aligned}$$

Como la última desigualdad es válida podemos concluir que la primera también lo es y por lo tanto los valores que toma $\frac{3n+5}{7n+8}$ van decreciendo a medida que n crece. Esto muestra que el valor máximo que toma $\frac{3n+5}{7n+8}$ se alcanza cuando $n = 0$. Es decir, $5/8$ es el máximo de A (y por lo tanto A es acotado superiormente).

Además observemos que

$$\frac{3n+5}{7n+8} = \frac{3+\frac{5}{n}}{7+\frac{8}{n}}.$$

Esta última igualdad muestra que $\frac{3n+5}{7n+8}$ se "aproxima" a $\frac{3}{7}$ para valores grandes de n. Mostraremos que el ínfimo de A es $\frac{3}{7}$. Debemos mostrar dos cosas:

(i) $3/7$ es una cota inferior de A: en efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$ como $7n+8 > 0$ entonces

$$\begin{array}{rcl} \frac{3}{7} < \frac{3n+5}{7n+8} & \Leftrightarrow & 21n + 24 < 21n + 35 \\ & \Leftrightarrow & 24 < 35. \end{array}$$

Como la última desigualdad es verdadera, entonces la primera también lo es y por lo tanto $3/7$ es una cota inferior para A.

(ii) Mostraremos que $3/7$ es la mayor de las cotas inferiores de A. Para hacerlo verificaremos que para todo $r > 3/7$ existe $x \in A$ tal que $x < r$ (es decir, r no es una cota inferior de A). Esto es equivalente a mostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{3n+5}{7n+8} < r.$$

Observemos que como $7n+8 > 0$, entonces

$$\begin{array}{rcl} \frac{3n+5}{7n+8} < r & \Leftrightarrow & 3n+5 < r(7n+8) \\ & \Leftrightarrow & 3n+5 < 7rn + 8r \\ & \Leftrightarrow & 5 - 8r < (7r-3)n \\ & \Leftrightarrow & \frac{5-8r}{7r-3} < n. \end{array}$$

Observe que para que la última equivalencia sea válida se requiere que $7r - 3 > 0$, lo cual es cierto pues $3/7 < r$.

De lo probado arriba se tiene que es suficiente mostrar que existe un natural n tal que

$$n > \frac{5-8r}{7r-3}.$$

Pero esto es claro, pues el teorema 2.13 precisamente dice que $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente en $\mathbb{R}$ y por lo tanto existe un natural mayor que $\frac{5-8r}{7r-3}$.

□

Ejemplo 2.18. Consideremos el conjunto

$$B = \left\{ \frac{3n+5}{7n+12} : \; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Mostraremos que el supremo de B es $3/7$. Observe la pequeña diferencia que existe entre las definiciones de A y B. Esta diferencia es la causante que ahora $3/7$ sea el supremo en lugar del ínfimo. Debemos mostrar dos cosas:

(i) $3/7$ es una cota superior de B. En efecto, como $7n + 12$ es positivo para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{3n+5}{7n+12} < \frac{3}{7} \Leftrightarrow 21n + 35 < 21n + 36 \Leftrightarrow 35 < 36.$$

Ya que la última desigualdad es verdadera, entonces concluimos que la primera también lo es.

(ii) $3/7$ es la menor de las cotas superiores de B. En efecto, sea $r < 3/7$, mostraremos que r no es una cota superior de B. Para hacerlo basta mostrar que existe $x \in B$ tal que $r < x$. Esto es equivalente a mostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$r < \frac{3n+5}{7n+12}.$$

Observemos que $7n + 12$ es positivo y por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} r < \tfrac{3n+5}{7n+12} &\Leftrightarrow r(7n+12) < 3n+5 \\ &\Leftrightarrow 7nr + 12r < 3n + 5 \\ &\Leftrightarrow 12r - 5 < (3 - 7r)n \\ &\Leftrightarrow \tfrac{12r-5}{3-7r} < n. \end{aligned}$$

Note que para que la última equivalencia sea válida se requiere que $3 - 7r > 0$, lo cual es cierto pues $r < 3/7$. Como antes, usando el hecho que $\mathbb{N}$ no es acotado en $\mathbb{R}$, concluimos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{12r-5}{3-7r} < n_0.$$

y usando la equivalencia mostrada anteriormente concluimos que

$$r < \frac{3n_0+5}{7n_0+12}.$$

Así que $\frac{3n_0+5}{7n_0+12}$ es el elemento de B que requeríamos.

$\square$

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$

Para mostrar que A es acotado superiormente debemos encontrar un real r tal que todo elemento de A es menor que r.

Para mostrar que A no es acotado superiormente debemos garantizar que para cualquier real r existe un elemento de A mayor que r.

Ejemplo 2.19. No todo conjunto acotado superiormente tiene máximo, como lo hemos visto en los ejemplos. Pero esto si ocurre para los subconjuntos de $\mathbb{N}$. En efecto, sea $A \subseteq \mathbb{N}$ no vacío y acotado superiormente. Mostraremos que A tiene máximo. Sea $r \in \mathbb{R}$ una cota superior de A. Como $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente (por el teorema 2.13), entonces existe un natural n_0 tal que $r < n_0$. En particular, $n_0 \notin A$ y en consecuencia $\mathbb{N} \setminus A$ no es vacío. Por el principio de buena ordenación de $\mathbb{N}$ (teorema 2.12), concluimos que $\mathbb{N} \setminus A$ tiene un primer elemento que llamaremos m_0. Dejamos al lector la tarea de mostrar que $m_0 \geq 1$ y que $m_0 - 1$ es el máximo de A.

$\square$

Ejercicios 2.3

1. Determine si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son (i) acotados superiormente y (ii) acotados inferiormente, en caso que lo sean, hallar su supremo y su ínfimo. Determinar si tienen máximo y/o mínimo.

   a) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$
   b) $\{n \in \mathbb{Z} : \ n \leq -4\}$
   c) $\{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N} \ \text{ y } \ n \geq 1\}$
   d) $\{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{Z} \ \text{ y } \ n \neq 0\}$
   e) $\{3 - \frac{1}{n-9} : \ n \in \mathbb{N} \ \text{ y } \ n \geq 15\}$
   f) $\{3 + \frac{4}{n} : \ n \in \mathbb{N} \ \text{ y } \ n \geq 1\}$
   g) $\{24 - \frac{5}{7n+2} : \ n \in \mathbb{N} \ \text{ y } \ n \geq 1\}$
   h) $\{\frac{3m+1}{m} : \ m \in \mathbb{Z} \ \text{ y } \ m \neq 0 \}$
   i) $\{\frac{n^2}{n^2+1} : \ n \in \mathbb{Z} \}$
   j) $\{x \in \mathbb{R} : \ x = 3n + 1 \ \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$
   k) $\{\frac{n^2}{5n^2+2} : \ n \in \mathbb{N} \}$
   l) $\{\frac{1}{n} + (-1)^n : \ n \in \mathbb{N} \ \text{ y } \ n \geq 1 \}$
   m) $\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : \ n \in \mathbb{N} \ \text{ y } \ n \geq 1 \}$
   n) $\{\frac{3}{9+n} : \ n \in \mathbb{N} \ \text{ y } \ n \geq 1 \}$
   ñ) $\{2^{-n} + 3^{-m} + 5^{-p} : \ n, m, p \in \mathbb{Z}^+\}$
   o) $\{\frac{2n+7}{6n+8} : \ n \in \mathbb{N}\}$
   p) $\{\frac{2n+1}{6n+8} : \ n \in \mathbb{N}\}$
   q) $\{\frac{2n+7}{6n+(-1)^n 8} : \ n \in \mathbb{N}\}$
   r) $\{\frac{2n+(-1)^n 7}{6n+8} : \ n \in \mathbb{N}\}$
   s) $\{\frac{2(-1)^n n+7}{6n+8} : \ n \in \mathbb{N}\}$

2. Para cada $x \in \mathbb{R}$ considere el siguiente conjunto
$$A(x) = \left\{ \frac{2n+x}{6n+8} : \; n \in \mathbb{N} \right\}$$
Muestre que $2/6$ es el supremo de $A(x)$ cuando $x = 1$ y es el ínfimo cuando $x = 7$. Determine que valores puede tomar x de tal forma que $2/6$ sea el supremo de $A(x)$.

3. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $x < y < z$. Muestre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{y-x}{z-x}$.

4. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, muestre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x + \frac{1}{n} < y$.

5. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x + y \geq 0$. Suponga que para todo natural $n \geq 1$ se cumple que $x \leq \frac{1}{n} - y$. Muestre que $x = -y$.

6. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente y c una cota superior de A. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   (i) c es el supremo de A.
   (ii) Para todo $r > 0$ existe $x \in A$ tal que $c - r < x \leq c$.
   (iii) Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x \in A$ tal que $c - \frac{1}{n} < x$.

7. Muestre que los teoremas 2.13, 2.14 y 2.15 son en realidad lógicamente equivalentes. Lo que queda por hacer es mostrar que si supone válido el corolario 2.15, entonces puede deducir que $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente.

2.4. Incompletitud de $\mathbb{Q}$

La siguiente proposición es la clave para mostrar que el axioma de completitud no es válido en $\mathbb{Q}$.

Proposición 2.20. *Sea $r \in \mathbb{Q}$ con $r > 0$.*

(i) Si $r^2 < 2$, entonces existe otro racional t tal que $r < t$ y $t^2 < 2$.

(ii) Si $2 < r^2$, entonces existe $t \in \mathbb{Q}$ tal que $2 < t^2$ y $0 < t < r$.

Antes de dar la demostración veamos el significado de esta proposición. Consideremos los conjuntos
$$\begin{aligned} A = &\; \{x \in \mathbb{Q} : \; 0 < x \text{ y } x^2 < 2\} \\ B = &\; \{x \in \mathbb{Q} : \; 0 < x \text{ y } x^2 > 2\}. \end{aligned}$$
Si representamos en la recta los elementos de A y de B observaremos que cada elemento de A está a la izquierda de todo elemento de B. En efecto, suponga $x \in A$ y $z \in B$. Entonces
$$x^2 < 2 < z^2.$$
Como x y z son positivos, entonces necesariamente $x < z$ (¿por qué?).

En particular, esto indica que A es acotado superiormente (pues todo elemento de B es una cota superior de A). Como A no es vacío (¿por qué?), el axioma de completitud garantiza que A tiene supremo. Sin embargo, veremos que el supremo de A no es racional y por consiguiente el axioma de completitud no es válido en $\mathbb{Q}$. En efecto, sea r el supremo de A. Supongamos, por reducción al absurdo, que r es racional. Como ya demostramos en la proposición 1.19, $r^2 \neq 2$. Por lo tanto hay dos casos a considerar:

(i) Supongamos que $r^2 < 2$. Entonces de la proposición 2.20 se tiene que existe otro racional t tal que $r < t$ y $t^2 < 2$. En particular, $t \in A$ y esto contradice que r es una cota superior de A.

(ii) Supongamos que $2 < r^2$. Entonces de la proposición 2.20 se tiene que existe otro racional t tal que $0 < t < r$ y $2 < t^2$. En particular, $t \in B$ y ya vimos que esto implica que t es una cota superior de A. Pero esto contradice que r es la menor de las cotas superiores de A.

La interpretación geométrica de lo que acabamos de mostrar es que existe un "hueco" entre A y B. Ese "hueco" lo ocupa el número real $\sqrt{2}$. Por esta razón se dice que el orden de $\mathbb{Q}$ es incompleto.

Podemos entonces concluir que las propiedades **P1,. . . , P12** no sirven para diferenciar a $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ pues los números racionales satisfacen todas ellas. El axioma del supremo es la propiedad mas importante que distingue a $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$.

Demostración de 2.20:

(i) Sea r un racional positivo tal que $r^2 < 2$. Buscamos un racional t que cumpla que $r < t$ y además que $t^2 < 2$. Los candidatos para t serán los racionales de la forma $r + 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$. El problema entonces se convierte en encontrar un natural n tal que

$$\left(r + \frac{1}{n}\right)^2 < 2 \tag{2.1}$$

Por inspección (es decir, por *ensayo y error*) se consigue que bastaría que n cumpliera que $n > \frac{2r+1}{2-r^2}$. Veamos que en efecto es así. Primero debemos garantizar que existe un natural con esa propiedad y después verificar que satisface (2.1). Por la proposición 2.13 sabemos que existe un natural n tal que

$$n > \frac{2r+1}{2-r^2}.$$

Ahora veremos que este natural n satisface (2.1). De la desigualdad anterior se tiene que

$$r^2 + \frac{2r+1}{n} < 2$$

y en consecuencia

$$\left(r+\frac{1}{n}\right)^2 = r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} \leq r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n} = r^2 + \frac{2r+1}{n} < 2.$$

Y esto es lo que queríamos.

(ii) Sea r un racional positivo tal que $r^2 > 2$. Buscamos un racional positivo t que cumpla que $t < r$ y además que $t^2 > 2$. Como hicimos en el apartado anterior, los candidatos para t serán los racionales de la forma $r - 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$. El problema entonces se convierte en encontrar un natural n tal que

$$\left(r-\frac{1}{n}\right)^2 > 2.$$

Como queremos un racional positivo, es decir, queremos que $r - 1/n$ sea positivo, buscaremos un natural n tal que

$$n > \frac{1}{r}\cdot \tag{2.2}$$

De la misma manera que hicimos en el apartado anterior, por inspección, se obtiene que es suficiente que n satisfaga lo siguiente

$$n > \frac{2r}{r^2-2}\cdot \tag{2.3}$$

Veamos que en efecto es así. De la proposición 1.31 se concluye que existe un natural n que cumple ambas condiciones (2.2) y (2.3) (¿por qué?). En particular, a partir de (2.3) se concluye que

$$r^2 - 2r/n > 2,$$

de donde

$$\left(r-\frac{1}{n}\right)^2 = r^2 - \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} > r^2 - \frac{2r}{n} > 2.$$

Y esto es lo que queríamos.

□

Ejercicios 2.4

1. En cada uno de los ejercicios que siguen muestre que existe un natural n con la propiedad indicada.

   a) $(r-1/n)^2 > 3$ donde r es un racional positivo tal que $r^2 > 3$.

   b) $(r+1/n)^2 < 7$ donde r es un racional positivo tal que $r^2 < 7$.

   c) $(r+1/n)^3 < 2$ donde r es un racional positivo tal que $r^3 < 2$.

d) $(r - 1/n)^4 > 3$ donde r es un racional positivo tal que $r^4 > 3$.

2. *a*) Sea $r \in \mathbb{Q}$, con $r > 0$ y $r^2 < 2$. Considere el racional
$$t = \frac{4r}{r^2 + 2}\,.$$
Muestre que $r < t$ y $t^2 < 2$

b) Sea $r > 0$ con $2 < r^2$. Considere el racional
$$t = \frac{r^2 + 2}{2r}\,.$$
Muestre que $t < r$ y $2 < t^2$.

3. En este ejercicio daremos otra prueba de la proposición 2.20. Sean $a, b \in \mathbb{N}$. Muestre que

(i) Si $\left(\frac{a}{b}\right)^2 < 2$, entonces $2 < \left(\frac{a+2b}{a+b}\right)^2$.

(ii) Si $2 < \left(\frac{a}{b}\right)^2$, entonces $\left(\frac{a+2b}{a+b}\right)^2 < 2$.

(iii) Si $\left(\frac{a}{b}\right)^2 < 2$, entonces $\left(\frac{3a+4b}{2a+3b}\right)^2 < 2$ y además $\frac{a}{b} < \frac{3a+4b}{2a+3b}$.

(iv) Si $2 < \left(\frac{a}{b}\right)^2$, entonces $2 < \left(\frac{3a+4b}{2a+3b}\right)^2$ y además $\frac{3a+4b}{2a+3b} < \frac{a}{b}$.

4. Considere los conjuntos
$$\begin{aligned} A = &\ \{r \in \mathbb{Q} :\ 0 < r \text{ y } r^2 < 2\} \\ B = &\ \{s \in \mathbb{Q} :\ 0 < s \text{ y } s^2 > 2\} \end{aligned}$$

(i) Muestre que A no tiene máximo y que B no tiene mínimo.

(ii) Muestre que para todo $r \in A$ y todo $s \in B$, $r < s$.

5. Sean $a, b \in \mathbb{N}$, verifique que

a) Si $\left(\frac{a}{b}\right)^2 < 5$, entonces $5 < \left(\frac{a+5b}{a+b}\right)^2$.

b) Si $5 < \left(\frac{a}{b}\right)^2$, entonces $\left(\frac{a+5b}{a+b}\right)^2 < 5$.

c) Sea
$$\begin{aligned} A = &\ \{r \in \mathbb{Q} :\ 0 < r \text{ y } r^2 < 5\} \\ B = &\ \{r \in \mathbb{Q} :\ 0 < r \text{ y } r^2 < 5\}. \end{aligned}$$
Muestre que A es acotado superiormente pero no tiene máximo. Muestre que B es acotado inferiormente pero no tiene mínimo.

6. Muestre que $\mathbb{Z}$ satisface **P13**, es decir, si $A \subseteq \mathbb{Z}$ no es vacío y es acotado superiormente, entonces el supremo de A pertenece a $\mathbb{Z}$.

2.5. Propiedades del supremo y del ínfimo

En esta sección veremos algunas de las propiedades del supremo y del ínfimo. El siguiente teorema, de uso frecuente, caracteriza al supremo de un conjunto.

Teorema 2.21. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
(i) c es el supremo de A
(ii) c es una cota superior de A y para todo $t < c$ existe $r \in A$ tal que $t < r \leq c$.

Demostración: Veamos que (i) implica (ii). Supongamos que c es el supremo de A y sea $t < c$. Por definición de supremo tenemos que t no puede ser una cota superior de A. Por lo tanto existe $r \in A$ tal que $t < r$ y como c es una cota superior de A, entonces $r \leq c$.

Veamos que (ii) implica (i). Supongamos ahora que (ii) se cumple y mostremos que c es el supremo de A. Por hipótesis c es una cota superior de A, así que sólo falta ver que c es la menor de la cotas superiores de A. En efecto, por (ii) tenemos que si $t < c$, entonces t no es una cota superior de A. Por lo tanto todas las cotas superiores de A son mayores o iguales a c.

□

Tenemos una caracterización del ínfimo similar a la que probamos en 2.21 para el supremo. Dejamos la demostración como un ejercicio.

Teorema 2.22. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto acotado inferiormente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) c es el ínfimo de A.
(ii) c es una cota inferior de A y para todo $t > c$ existe $r \in A$ tal que $c \leq r < t$.

□

El siguiente resultado nos dice cómo calcular el supremo de $A \cup B$

Teorema 2.23. *Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente. Entonces $A \cup B$ es acotado superiormente y además*

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}.$$

Demostración: Hay dos casos posibles: $\sup A \leq \sup B$ o $\sup B < \sup A$. Como el papel que juegan A y B es simétrico, ambos casos se tratan exactamente de la misma manera y por esto sólo haremos el primero.

Supongamos que $\sup A \leq \sup B$. Esto nos dice que

$$\max\{\sup A, \sup B\} = \sup B$$

y por consiguiente lo que debemos mostrar es que

$$\sup(A \cup B) = \sup(B).$$

Para comenzar mostraremos que $A \cup B$ es acotado superiormente. En efecto, sea $x \in A \cup B$. Hay dos alternativas: $x \in A$ o $x \in B$. Si $x \in A$, por definición del supremo tenemos que

$x \leq \sup A$ y como estamos suponiendo que $\sup A \leq \sup B$, entonces $x \leq \sup B$. De igual manera, si $x \in B$, entonces por definición de supremo tenemos que $x \leq \sup B$. Hemos mostrado entonces que $x \leq \sup B$ para todo $x \in A \cup B$. Esto dice que $\sup B$ es una cota superior de $A \cup B$.

Para mostrar que sup B es el supremo de $A \cup B$ usaremos el teorema 2.21. Como ya mostramos que sup B es un cota superior de $A \cup B$, sólo nos queda verificar la condición (ii) en 2.21. Sea entonces $r <$ sup B. Entonces r no es una cota superior de B, por consiguiente existe $x \in B$ tal que $r < x \leq$ sup B. Pero obviamente x también pertenece a $A \cup B$ y con esto queda verificada la condición (ii).

□

Ejercicios 2.5

1. Considere el conjunto
$$A = (1, 3] \ \cup \ (4, 8)$$
y la siguiente afirmación:
$$\text{Para todo } t < c \text{ existe } x \in A \text{ tal que } t < x \leq c.$$
Muestre que si $c = 4$ esta proposición es falsa, pero para $c = 7$ es verdadera. ¿Qué relación guarda este ejercicio con el teorema 2.21?

2. Sea
$$A = [1, 5) \ \cup \ (6, 9].$$
Determine si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:
$$\text{Para todo } t < \tfrac{19}{2} \text{ existe } r \text{ tal que } t < r \leq \tfrac{19}{2}.$$
¿Que relación guarda este ejercicio con el teorema 2.21?

3. Sea
$$B = \{c \in \mathbb{R} : \text{ Para todo } t < c \text{ existe } x \in A \text{ tal que } t < x \leq c\}.$$
Dé toda la información que pueda acerca de B para cada uno de los siguientes valores de A.
   a) $A = [1, 2)$
   b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \ \cup \ [9, 24)$
   c) $A = (2, 3) \cup (3, 5]$
   d) $A = (1, 6] \ \cup \ \{7, \frac{22}{3}, \frac{36}{5}, 8\}$
   e) $A = \{\frac{n}{n+1} : \ n \in \mathbb{N}\}$

4. *a*) Sea A un conjunto acotado superiormente y c un real que satisface que para todo $t < c$ existe $r \in A$ tal que $t < r \leq c$ ¿Es c el supremo de A?

b) Sea A un conjunto acotado superiormente y c una cota superior de A que además satisface que para todo $t < c$ existe r tal que $t < r \leq c$ ¿Es c el supremo de A?

¿Qué relación guarda este ejercicio con el teorema 2.21?

5. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto acotado inferiormente. Muestre que los siguientes enunciados son equivalentes.

   a) c es el ínfimo de A.

   b) c es una cota inferior de A y para todo $t > c$ existe $r \in A$ tal que $c \leq r < t$.

6. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ acotados inferiormente. Muestre que $A \cup B$ es acotado inferiormente y además que
$$\text{ínf}(A \cup B) = \text{mín}\{\text{ínf}(A), \text{ínf}(B)\}.$$

7. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente tales que $A \cap B \neq \emptyset$.

   a) Muestre que
$$\sup(A \cap B) \leq \text{mín}\{\sup A, \sup B\}.$$

   b) Halle dos conjuntos tales que la desigualdad anterior sea una igualdad

   c) Halle dos conjuntos tales que la desigualdad anterior sea estricta.

8. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ con las siguientes propiedades

   a) Si $x \in A$ y $y < x$, entonces $y \in A$.

   b) $A \neq \emptyset$.

   c) $A \neq \mathbb{R}$.

   d) Si $x \in A$, entonces existe algún $y \in A$ tal que $x < y$.

   Muestre que A es acotado superiormente y que $A = \{r \in \mathbb{R} : r < \sup A\}$ (*Sugerencia:* Recuerde que para mostrar que dos conjuntos X e Y son iguales se debe mostrar que todo elemento de X pertenece a Y y también que todo elemento de Y pertenece a X. Es decir, hay que mostrar que $X \subseteq Y$ y también que $Y \subseteq X$).

9. Recuerde que dados dos subconjuntos A, B de $\mathbb{R}$ definimos
$$A + B = \{x + y : \ x \in A, y \in B\}.$$

   a) Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente. Muestre que
$$\sup(A + B) = \sup A \ + \ \sup B.$$
   (*Sugerencia:* Para ver que $\sup(A + B) \leq \sup A \ + \ \sup B$, basta mostrar que $\sup A \ + \ \sup B$ es una cota superior de $A + B$. Por otra parte, para ver que $\sup A \ + \ \sup B \leq \sup(A + B)$, muestre que dado $a \in A$ cualquiera, se tiene que $\sup(A+B)-a$ es una cota superior de B. De esto deduzca que $\sup(A+B)-\sup B$ es una cota superior para A).

b) Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ acotados inferiormente. Muestre que

$$\text{ínf } (A+B) = \text{ínf } A \; + \; \text{ínf } B.$$

10. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, definimos el conjunto $-A$ de la manera siguiente

$$-A = \{-r \in \mathbb{R} : \; r \in A\}.$$

a) Suponga que $A \subseteq \mathbb{R}$ no es vacío y es acotado inferiormente. Muestre que $-A$ está acotado superiormente y además que

$$-\sup(-A) = \text{ínf}(A).$$

b) Use el ejercicio anterior para dar otra demostración de que todo conjunto no vacío de números reales que sea acotado inferiormente tiene ínfimo.

11. *a*) Sean A y B dos conjuntos no vacíos de números reales. Supongamos que $a \leq b$ para todo $a \in A$ y todo $b \in B$.
Muestre que
(i) $\sup A \leq b$ para todo $b \in B$.
(ii) $\sup A \leq \text{ínf } B$

b) De un ejemplo de dos conjuntos de números reales A y B no vacíos tales que $a \leq b$ para todo $a \in A$ y todo $b \in B$.

12. Sean A, B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $A \subseteq B$ y $A \neq \emptyset$.

a) Muestre que si B es acotado superiormente, entonces A también lo es y en este caso se cumple que $\sup A \leq \sup B$.

b) De manera similar, muestre que si B es acotado inferiormente, entonces A también lo es y además $\text{ínf } B \leq \text{ínf } A$.

c) Suponga que B no es acotado superiormente (y $A \subseteq B$) ¿Es posible que A sea acotado superiormente? Si su respuesta es "si", de un ejemplo.

d) ¿Existirán subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $A \subseteq B$, B acotado superiormente, $A \neq B$ y $\sup A = \sup B$?

2.6. Los números irracionales y la ecuación $x^n = a$

Hemos visto que la ecuación

$$x^2 = 2$$

no tiene solución en $\mathbb{Q}$. Ahora mostremos que sí la tiene en $\mathbb{R}$, en otras palabras, existe un número real, que se denota por $\sqrt{2}$, tal que

$$(\sqrt{2})^2 = 2.$$

La prueba de este hecho que, por ser tan conocido, parecería simple de mostrar, no lo es del todo. Primero mostraremos un resultado auxiliar (se acostumbra a llamar *lema* a este tipo de resultados auxiliares).

Lema 2.24. *Sea r un real tal que $0 < r < 1$. Entonces se cumple que*

$$(1 + r)^2 < 1 + 3r$$

Demostración: Como $0 < r < 1$, entonces multiplicando por r la segunda desigualdad obtenemos que $r^2 < r$. Por otra parte tenemos que $(1 + r)^2 = 1 + 2r + r^2$. Por lo tanto $(1 + r)^2 = 1 + 2r + r^2 < 1 + 2r + r = 1 + 3r$.

□

Teorema 2.25. *Dado un real $a > 0$, existe un número real $b > 0$ tal que $b^2 = a$.*

Demostración: Consideremos el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0, \ x^2 \leq a\}.$$

Es obvio que A no es vacío pues $0 \in A$. Veamos ahora que A es acotado superiormente. En efecto, mostraremos que $1+a$ es una cota superior de A. Sea $x \in A$. Consideramos dos casos: (i) Si $x < 1$, entonces es claro que $x < 1 + a$. (ii) Si $x \geq 1$, entonces $x \leq x^2$. Como $x \in A$, entonces $x \leq a$. En consecuencia $x < 1 + a$.

Por el axioma de completitud A tiene supremo. Sea c el supremo de A. Veremos que $c^2 = a$. Supongamos que no es cierto, es decir, que $c^2 \neq a$. Hay dos casos a considerar: (1) $c^2 < a$ y (2) $a < c^2$. Los analizaremos por separado y veremos que ambos llevan a una contradicción.

Caso 1: Supongamos que $c^2 < a$. Primero mostraremos que $c > 0$. En efecto, es fácil verificar que $\frac{a}{a+1} \in A$ y como $\frac{a}{a+1} > 0$ se tiene que $c > 0$.

Mostraremos que existe $t > 0$ tal que $c < t$ y $t^2 < a$. Esto contradice que c es una cota superior de A. El t deseado lo buscaremos que tenga la forma $(1 + r)c$ con $r > 0$. Estos números son claramente mayores que c. Ahora lo que estamos buscando es un real $r > 0$ tal que

$$[(1 + r)c]^2 < a.$$

Y esto es equivalente a

$$(1 + r)^2 < \frac{a}{c^2}.$$

Por el lema 2.24 sabemos que para todo $0 < r < 1$ se cumple que

$$(1 + r)^2 < 1 + 3r.$$

Por esto, bastaría hallar r tal que $0 < r < 1$ y además que

$$1 + 3r < \frac{a}{c^2}.$$

Veamos que si podemos elegir un real con esas características. Como $\frac{a-c^2}{3c^2} > 0$ podemos escoger un real r_0 tal que

$$0 < r_0 < \frac{a - c^2}{3c^2}$$

y además también podemos pedir que

$$r_0 < 1.$$

En resumen, sea $t = c(1 + r_0)$. De la discusión que acabamos de hacer se deduce que

$$1 + 3r_0 < \frac{a}{c^2}.$$

y por lo tanto $t^2 < a$ y $c < t$.

Caso 2: Supongamos que $c^2 > a$. Análogamente al caso 1, mostraremos que existe $t > 0$ tal que $t < c$ y $t^2 > a$. Como un real t como el anterior pertenece a A, esto mostraría que c no es una cota superior de A lo cual es una contradicción.

Ahora veremos como hallar t. En este caso t lo buscaremos entre los números de la forma $\frac{c}{1+r}$ con $r > 0$, que claramente son todos menores que c. Escojamos un real $r < 1$ tal que

$$0 < r < \frac{c^2 - a}{3a}.$$

De la última desigualdad se deduce que

$$3ar < c^2 - a.$$

Luego

$$3ar + a < c^2.$$

Factorizando obtenemos

$$a(1 + 3r) < c^2.$$

De nuevo usando el lema 2.24 obtenemos a partir de la última desigualdad que

$$a(1 + r)^2 < c^2.$$

Por lo tanto

$$a < \left(\frac{c}{1+r}\right)^2.$$

y esto era lo que buscábamos.

□

El número real b dado por el teorema anterior se llama la **raíz cuadrada** de a y se denota por

$$\sqrt{a}.$$

Los números reales que no son racionales se llaman **irracionales** y se denotan con la letra $\mathbb{I}$.

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Ya vimos que, por ejemplo, $\sqrt{2}$ es irracional. Ahora mostraremos un resultado mas general. Considere la ecuación

$$x^n = a.$$

Mostraremos que tiene solución en $\mathbb{R}$ para todo entero positivo n y todo real positivo a.

Al igual que lo hecho para la demostración de la existencia de la raíz cuadrada necesitamos un resultado preliminar

Lema 2.26. *Sea r un real tal que $0 < r < 1$ y n un entero positivo. Entonces se cumple que*

$$(1+r)^n < 1 + 3^n r.$$

Demostración: La demostración la haremos por inducción.

Base de la inducción: Cuando $n = 1$ es evidente que

$$1 + r < 1 + 3r.$$

Paso inductivo: Supongamos que

$$(1+r)^n < 1 + 3^n r \tag{2.4}$$

y mostraremos que

$$(1+r)^{n+1} < 1 + 3^{n+1} r.$$

En efecto, tenemos que

$$(1+r)^{n+1} = (1+r)^n(1+r).$$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad 2.4 por $(1+r)$ (que es positivo, ¿por qué?) obtenemos

$$(1+r)^{n+1} < (1+3^n r)(1+r).$$

Por otra parte, tenemos que

$$(1+3^n r)(1+r) = 1 + 3^n r + r + 3^n r^2.$$

Ahora bien, como $0 < r < 1$ entonces $r^2 < r$ (¿por qué?) y así $3^n r^2 < 3^n r$. Además $1 < 3^n$, luego $r < 3^n r$. De esto concluimos que

$$1 + 3^n r + r + 3^n r^2 < 1 + 3^n r + 3^n r + 3^n r = 1 + 3^{n+1} r.$$

Usando la transitividad de $<$ obtenemos de las desigualdades anteriores que

$$(1+r)^{n+1} < 1 + 3^{n+1} r.$$

Y con esto termina la verificación del paso inductivo. $\square$

Teorema 2.27. *Dado un real $a > 0$ y un entero positivo n, existe un número real $b > 0$ tal que $b^n = a$.*

Demostración: La demostración es enteramente análoga a la del teorema 2.25. Daremos suficiente indicaciones como para que el lector interesado pueda completarla. Fijemos $a > 0$ y un entero positivo n. Consideremos el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0, \ x^n \leq a\}.$$

A no es vacío pues $0 \in A$. Muestre que A es acotado superiormente verificando que $1 + a$ es una cota superior de A. Sea c el supremo de A. Muestre, por reducción al absurdo, que $c^n = a$. Hay dos casos a considerar: (1) $c^n < a$ y (2) $a < c^n$. Se analizan por separado.

Caso 1: Suponga que $c^n < a$. Muestre que $c > 0$. Ahora muestre que existe un real $t > 0$ tal que $c < t$ y $t^n < a$ y de esto deduzca una contradicción.

El real t lo buscaremos entre los números de la forma $c(1+r)$ con $r > 0$. Como $\frac{a-c^n}{3^n c^n} > 0$ podemos escoger un real r tal que $0 < r < \frac{a-c^n}{3^n c^n}$ y además $r < 1$. Usando el lema 2.26 y siguiendo los mismos pasos que en la demostración del teorema 2.25 demuestre que

$$[c(1 + r)]^n < a.$$

Por lo tanto $c(1 + r) \in A$. De esto deduzca una contradicción.

Caso 2: Suponga que $c^n > a$. Análogamente al caso 1 podemos escoger un real $r < 1$ tal que $0 < r < \frac{c^n-a}{3^n a}$. Siguiendo los mismos pasos que la demostración del teorema 2.25 (caso 2) muestre que

$$a < \left(\frac{c}{1 + r}\right)^n.$$

Como $(\frac{c}{1+r}) < c$, entonces c no es el supremo de A.

□

Dado un real $a > 0$ y un entero positivo n, el real $b > 0$ tal que $b^n = a$, dado por el teorema 2.27, se llama la **raíz n-ésima** de a y se denota por

$$\sqrt[n]{a}.$$

El hecho que no exista un racional cuyo cuadrado sea 2 no se debe a que el 2 tenga algo especial. En este sentido el siguiente resultado es más general.

Proposición 2.28. *Sean $n, a \in \mathbb{N}$. Si existe un racional r tal que $r^n = a$, entonces existe un natural m tal que $m^n = a$.*

Demostración: Sean $p, q \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = a$$

y $mcd(p, q) = 1$. Entonces $p^n = aq^n$, por lo tanto $q^n | p^n$. Pero $mcd(p^n, q^n) = 1$ (¿por qué?), entonces $q^n = 1$ y por lo tanto $p^n = a$.

□

De lo dicho anteriormente se concluye que los siguiente números son irracionales

$$\sqrt[4]{21}, \sqrt[3]{15}, \sqrt[7]{2}$$

Para concluir esta sección, daremos la defininción de a^q para un racional q y un real $a > 0$.

Definición 2.29. *Sea a un real positivo y q un racional cualquiera. Definimos*

$$a^q$$

de la manera siguiente:

1. $a^0 = 1$.
2. *Si* $q = \frac{m}{n}$ *con* $n, m > 0$, *entonces* $a^q = \sqrt[n]{a^m}$.
3. *Si* $q = \frac{-m}{n}$ *y con* $n, m > 0$, *entonces* $a^q = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}$.

Por ejemplo:

$$3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}.$$

Ejercicios 2.6

1. Demuestre que los siguiente números son irracionales:
   a) $\sqrt{3}, \sqrt{5}$, $\sqrt{6}$
   b) $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[3]{3}$
   c) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2$
   d) $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$
2. ¿Para cuáles naturales n existe un racional r tal que $r^n = n$?
3. Use la proposición 2.28 para determinar para cuáles naturales n y a se cumple que $\sqrt[n]{a}$ es irracional.
4. a) Si a es racional y b es racional, ¿Es $a + b$ necesariamente racional? ¿Y si a ó b es irracional?
   b) Si a es racional y b es irracional, ¿es ab necesariamente irracional?
   c) ¿Existe algún número real a tal que a^2 es irracional pero a^4 es racional?
   d) Determine si la suma de irracionales es irracional.
   e) ¿Existen dos números irracionales tales que tanto su suma como su producto sean racionales?
   f) Sea a un número irracional, ¿Es a^{-1} irracional?

5. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$. Muestre que existe un real $r > 0$ tal que $y = (r+1)x$.

6. Sean a, b, c números reales. Suponga que $b^2 - 4ac > 0$. Muestre que los siguientes dos reales
$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
cumplen con la ecuación
$$ax^2 + bx + c = 0.$$

7. Sean a, b, c y d racionales y x un irracional tal que $cx + d \neq 0$. Muestre que
$$\frac{ax + b}{cx + d}$$
es irracional si, y sólo si, $ad \neq bc$.

8.
   a) Sea $r \in \mathbb{R}$ con $0 < r < 1$. Muestre que $0 < r^n < r$ para todo entero $n > 1$.
   b) Sea $r \in \mathbb{R}$ con $1 \leq r$. Muestre que $r \leq r^n$ para todo entero $n \geq 1$.
   c) Sean a, b reales positivos con $a < b$. Muestre que $a^2 < b^2$.
   d) En general, muestre que si $0 < a < b$, entonces $a^n < b^n$ para todo entero $n > 1$ (*Sugerencia:* Recuerde que $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1})$).

9. Sea x un real positivo. Muestre que
$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \sqrt{x} - \sqrt{x-1}.$$
(*Sugerencia:* $1 = (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$)

10. (*Desigualdad de Bernoulli*) Sea $r \in \mathbb{R}$, con $r > -1$, $r \neq 0$ y $n > 1$ un entero. Entonces
$$(1+r)^n > 1 + nr$$
(*Sugerencia:* Use inducción).

11. Sean x e y reales. Muestre que
$$2xy \leq x^2 + y^2 \qquad \text{y} \qquad 4xy \leq (x+y)^2.$$

12. Sean x e y reales positivos. Muestre que
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

13. Sea x un real positivo. Muestre que
$$2 \leq x + \frac{1}{x}.$$

14. Sean a y b dos reales positivos. Muestre que
$$\left(\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)^2 \leq \frac{a\cdot b}{4}.$$

15. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, muestre que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $x < \sqrt{5r} < y$.

16. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, muestre que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $x < \frac{1}{\sqrt{7r}} < y$.

17. Considere las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$: $g(x) = x^2$ y
$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{, si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$
Determine para cuáles reales x se cumple que $h(x) \leq g(x)$

18. Considere la función
$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } x \text{ es racional} \\ \frac{1}{x} & \text{, si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$
Determine para cuáles reales x se cumple que $h(x) \leq x$.

2.7. $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$

Veremos en seguida una consecuencia interesante de la propiedad Arquimediana: entre cada dos reales existe un racional. Este hecho es muy importante, pues nos indica que los números reales se pueden aproximar con racionales y la aproximación se puede lograr con la precisión que se desee.

Antes de mostrar lo dicho anteriormente necesitamos definir la *parte entera* de un número real y para ello necesitaremos el siguiente resultado.

Teorema 2.30. *Sea $r \in \mathbb{R}$. Existe un único entero m tal que*
$$m \leq r < m+1.$$

Demostración: Primero probaremos el resultado suponiendo que $r \geq 0$ y después analizaremos los casos restantes. Consideremos el siguiente conjunto:
$$A = \{n \in \mathbb{N} : \ r < n\}.$$
Como $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente sabemos que A no es vacío (¿ por qué?). Por el principio de buena ordenación para $\mathbb{N}$ sabemos que A tiene un primer elemento que denotaremos con n_0. Notemos que $n_0 - 1 \geq 0$ (¿por qué?) y como $n_0 - 1 \not\in A$, entonces concluimos que $n_0 - 1 \leq r$. Por esto $m = n_0 - 1$ es el entero buscado.

Ahora analizaremos el caso $r < 0$. Como $-r > 0$, entonces por lo visto arriba sabemos que existe un entero n tal que $n \leq -r < n+1$. Tenemos entonces que $-n-1 < r \leq -n$, luego hay dos casos posibles: (a) Si r es un entero, tomamos $m = r$ que claramente satisface los deseado. (b) Si r no es un entero, entonces tomamos $m = -n-1$ que ya vimos satisface que $-n-1 \leq r < -n$.

Por último mostraremos que existe un único entero m con esas propiedades. Supongamos que m y m' son enteros tales que ambos satisfacen que $m \leq x < m+1$ y $m' \leq x < m'+1$. Entonces tenemos que $m < m'+1$ y también que $m' < m+1$. Luego $m \leq m'$ y $m' \leq m$, por lo tanto $m = m'$.

□

Definición 2.31. *Para cada real r el entero m dado por el teorema 2.30 se llama la* ***parte entera*** *de r y se denota por $[r]$. En otras palabras, la parte entera $[r]$ es el único entero que satisface*

$$[r] \leq r < [r] + 1.$$

□

Ejemplo 2.32.

1. La parte entera de $\frac{3}{2}$ es 1, en símbolos, $[\frac{3}{2}] = 1$. Pues es claro que $1 \leq \frac{3}{2} < 2$.
2. $[-\frac{4}{3}] = -2$, pues $-2 \leq \frac{-4}{3} < -1$.
3. Sea n un entero, entonces de la definición de la parte entera es claro que $[n] = n$. Por ejemplo, $[4] = 4$, $[-57] = -57$.

□

Ahora podemos mostrar que los racionales son densos en $\mathbb{R}$. Este es una propiedad fundamental del orden de los números reales.

Teorema 2.33. *(Densidad de $\mathbb{Q}$) Dados dos reales r, s con $r < s$, existe un racional q tal que $r < q < s$.*

Demostración: Como $s - r > 0$, por el corolario 2.15 existe un entero positivo n_0 tal que

$$\frac{1}{n_0} < s - r. \tag{2.5}$$

Considere la parte entera de nr_0, es decir, el entero $[n_0 r]$. Tenemos entonces

$$[n_0 r] \leq n_0 r < [n_0 r] + 1. \tag{2.6}$$

De (2.5) se tiene que

$$\frac{n_0 r + 1}{n_0} < s$$

y (2.6) se tiene que

$$r < \frac{[n_0 r] + 1}{n_0} \leq \frac{n_0 r + 1}{n_0}$$

De lo anterior concluimos que el racional buscado es

$$\frac{[n_0 r] + 1}{n_0}$$

□

En resultado anterior nos dice, por ejemplo, que dado un real r cualquiera y un natural n existe un racional q tal que

$$r < q < r + \frac{1}{10^{n+1}}$$

esto quiere decir que q y r *están muy cerca*. La diferencia entre ellos es menor que $\frac{1}{10^{n+1}}$, por lo tanto las primeras n cifras de sus respectivas expansiones decimales coinciden.

Ejercicios 2.7

1. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Suponga que para todo $r > 0$ se cumple que $x \leq y + r$. Muestre que $x \leq y$. (*Sugerencia:* Suponga lo contrario y use el corolario 2.15).

2. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $0 < x < y$, muestre que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que
$$\frac{1}{y} < \frac{1}{r} < \frac{1}{x}.$$

3. Dado $x > 1$, muestre que existe un racional $y > 1$ tal que
$$1 + \frac{45}{y} < x.$$

4. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $x < y < z$. Muestre que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que
$$x < \left(\frac{z - x}{y - x}\right) r < y.$$

5. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$. Muestre que existe $z \in \mathbb{R}^+$ tal que $x + w < y$ para todo $w \leq z$.

6. Dado $x < 7$, muestre que existe $y < -1$ y $z < 8$ tal que $x = y + z$.

7. Muestre que para todo $x \in \mathbb{R}$ existen $y, z \in \mathbb{R}$ tales que $y < 3$, $z > 6$ y $x = y + z$.

8. Sea x un número real tal que $2 < x < 5$, muestre que existen dos números reales a, b tales que $1 < a < 3$, $1 < b < 2$ y $x = a + b$.

9. Sea x un número real tal que $1 < x < 6$, muestre que existen dos números reales a, b tales que $1 < a < 3$, $1 < b < 2$ y $x = ab$.

10. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente y c una cota superior de A. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) c es el supremo de A.

(ii) Para todo $r \in \mathbb{Q}^+$ existe $x \in A$ tal que $c - r < x \leq c$.

11. Sean $r, s \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ con $n > 0$. Muestre que

    a) $[r + s] \geq [r] + [s]$

    b) $[[r]/n] = [r/n]$

12. Sean

$$A = \big[(\sqrt{2}, 6) \cup (6, +\infty) \big] \cap \mathbb{Q}$$

$$B = \{c \in \mathbb{R} : \text{ Para todo } t > c \text{ existe } x \in A \text{ tal que } c \leq x < t\}.$$

Determine todos los elementos de B.

2.8. Subconjuntos densos de $\mathbb{R}$

Definiremos ahora la noción de subconjunto denso de $\mathbb{R}$ de manera análoga a como lo hiciéramos para los racionales (ver la definición 1.26).

Definición 2.34. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}$, diremos que D es **denso** en $\mathbb{R}$ si para todo par de reales r, s con $r < s$, existe un elemento $d \in D$ tal que $r < d < s$.*

El teorema 2.33 nos dice que $\mathbb{Q}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{R}$. Existen muchos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son densos. Veremos a continuación que el conjunto de los irracionales es uno de ellos.

Teorema 2.35. *El conjunto de los números irracionales es denso en $\mathbb{R}$.*

Demostración: Sabemos que $\sqrt{2}$ es un irracional. Mostraremos primero que el siguiente conjunto es denso en $\mathbb{R}$

$$D = \{q\sqrt{2} : \; q \in \mathbb{Q}\}.$$

Y a partir de esto mostraremos que el conjunto de los irracionales es denso en $\mathbb{R}$. Sean r, s reales tales que $s < r$. Mostraremos que existe un elemento a en D tal que $s < a < r$. Como $1/\sqrt{2} > 0$ (¿por qué?) se tiene que $s/\sqrt{2} < r/\sqrt{2}$. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ (por el teorema 2.33) sabemos que existe un racional q tal que

$$s/\sqrt{2} < q < r/\sqrt{2}.$$

Y de esto se obtiene que

$$s < \sqrt{2} \cdot q < r.$$

Como $\sqrt{2} \cdot q \in D$, entonces concluimos que D es denso en $\mathbb{R}$.

Observemos ahora que

$$D \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{I}.$$

En efecto, para cualquier racional q distinto de 0 el número $\sqrt{2} \cdot q$ no puede ser racional: si lo fuera, entonces $\sqrt{2}$ también sería racional (¿por qué?).

Mostremos que $\mathbb{I}$ es denso en $\mathbb{R}$. Sean $r, s \in \mathbb{R}$ tales que $r < s$. Como D es denso en $\mathbb{R}$ entonces existe $t \in D$ tal que $r < t < s$. Si $t \neq 0$, ya observamos que $D \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{I}$ por lo tanto $t \in \mathbb{I}$. En el caso que $t = 0$, usamos de nuevo el hecho que D es denso para obtener $t' \in D$ tal que $r < t' < 0 < s$ y ahora t' es irracional. $\square$

Ejercicios 2.8

1. Muestre que los siguientes conjuntos son densos en $\mathbb{R}$

   a) $\{q\sqrt{5} : \ q \in \mathbb{Q}\}$.

   b) $\{q + \sqrt{2} : \ q \in \mathbb{Q}\}$.

   c) $\{q - \sqrt{3} : \ q \in \mathbb{Q}\}$

2. Determine si los siguientes conjuntos son densos en $\mathbb{R}$.

   a) $\mathbb{R} \setminus \{7\}$

   b) $\{r \in \mathbb{R} : \ r \leq 6\} \cup \{r \in \mathbb{R} : \ 10 \leq r\}$

   c) $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt[5]{3}\}$

   d) $\mathbb{N}$

   e) $\mathbb{Z}$

   f) $\{\frac{1}{2^n} : \ n \in \mathbb{N}\}$

   g) $\{\pm\frac{1}{2^n} : \ n \in \mathbb{N}\}$

   h) $\{m + \frac{1}{n} : \ m, n \in \mathbb{Z}\ n \neq 0\}$

   i) $\{m \pm \frac{1}{2^n} : \ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

   j) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

3. Muestre que el siguiente conjunto es denso en $\mathbb{R}$

$$\left\{\frac{m}{10^n} : \ m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

   (*Sugerencia:* Use la proposición 1.32)

4. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique su respuesta, es decir, de una prueba en caso de ser verdadera y un contraejemplo en caso de ser falsa.

   a) Sea $D \subseteq \mathbb{Q}$. Si D es denso en $\mathbb{R}$, entonces D es denso en $\mathbb{Q}$.

   b) Sea $D \subseteq \mathbb{Q}$. Si D no es denso en $\mathbb{R}$, entonces D no es denso en $\mathbb{Q}$.

   c) Sea $D \subseteq \mathbb{R}$. Si D es denso en $\mathbb{R}$, entonces D es denso en $\mathbb{Q}$.

   d) Sean $E \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ tales que E es denso en $\mathbb{R}$. Muestre que D es también denso en $\mathbb{R}$.

   e) Existen dos subconjuntos D, E de $\mathbb{R}$ que no son densos, pero tal que $D \cup E$ es denso.

5. Sea $D \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto denso en $\mathbb{R}$. Sea $r \in \mathbb{R}$ un real cualquiera distinto de 0. Definimos
$$rD = \{rx : x \in D\} \text{ y } D + r = \{r + d : d \in D\}.$$
   a) Muestre que rD y $r + D$ son densos en $\mathbb{R}$. En particular concluya que el conjunto de todos los números reales de la forma $q\sqrt{2}$ con q un racional es denso. Igualmente, concluya que el conjunto de los reales de la forma $q + \sqrt{2}$ es denso en $\mathbb{R}$. (*Sugerencia:* Ver la demostración de que los irracionales son densos en $\mathbb{R}$).
   b) Muestre que $(\mathbb{Q} + \sqrt{2}) \cap (\mathbb{Q} + \sqrt{3}) = \emptyset$.
   c) Muestre que si r es un irracional, entonces $(\mathbb{Q} + r) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$.
   d) De los ejercicios anteriores deduzca que existen tres subconjuntos densos E, F y G de $\mathbb{R}$ tales que $E \cap F = \emptyset$, $F \cap G = \emptyset$ y $E \cap G = \emptyset$.

6. Muestre que si D es denso en $\mathbb{R}$, entonces para cualquier conjunto no vacío $E \subseteq \mathbb{R}$ el conjunto $D + E$ es denso en $\mathbb{R}$.

7. Muestre
$$\mathbb{Q} + (0, 1) = \mathbb{R}.$$

8. Sea $D \subseteq \mathbb{R}$ denso y $a < b$ reales. Muestre que
$$D + (a, b) = \mathbb{R}.$$

9. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{Q} + E = \mathbb{R}$. Muestre que $E \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

Ejercicios suplementarios para el Capítulo 2

1. Determinar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son acotados superiormente y/o acotados inferiormente, en caso que lo sean, hallar su supremo y/o su ínfimo. Determinar si tienen máximo y/o mínimo.

   a) $\{\frac{3n+5}{7n+8} : n \in \mathbb{N}\}$ (*Ayuda:* El ínfimo es $\frac{3}{7}$)

   b) $\{\frac{3n+5}{7n+12} : n \in \mathbb{N}\}$ (*Ayuda:* El supremo es $\frac{3}{7}$)

   c) $\{\frac{7n+8}{3n+5} : n \in \mathbb{N}\}$ (*Ayuda:* El supremo es $\frac{7}{3}$)

   d) $\{\frac{7n+12}{3n+5} : n \in \mathbb{N}\}$ (*Ayuda:* El ínfimo es $\frac{7}{3}$)

   e) $\{\frac{3-n^2}{5-2n^2} : n \in \mathbb{N}\}$

   f) $\{\frac{3-n^2}{7-2n^2} : n \in \mathbb{N}\}$

   g) $\{\frac{5-2n^2}{3-n^2} : n \in \mathbb{N}\}$

   h) $\{\frac{7-2n^2}{3-n^2} : n \in \mathbb{N}\}$

   i) $\{\frac{3-n^2}{6-2n^2} : n \in \mathbb{N}\}$

   j) $\{7 - \frac{(-1)^n}{n^2+1} : n \in \mathbb{N}\}$

   k) $\{7 + \frac{(-1)^n}{n^2+1} : n \in \mathbb{N}\}$

   l) $\{\frac{2n^2+n+1}{3n^2+n+1} : n \in \mathbb{N}\}$

   m) $\{\frac{2q^2+5q+3}{3q^2-q+8} : q \in \mathbb{Q},\ q \geq 1\}$

   n) $\{\frac{3x^2+5}{7x^2+8} : x \in \mathbb{R},\ x \geq 1\}$

   ñ) $\{\frac{3}{x-1} :\ x > 1,\ x \in \mathbb{R}\}$

   o) $\{\frac{3}{x-1} :\ x < 1,\ x \in \mathbb{R}\}$

   p) $\{\frac{1}{2^n} :\ n \in \mathbb{N}\}$

   q) $\{1 - \frac{1}{n+8} :\ n \in \mathbb{N}\ \text{ y }\ n \geq 1\}$

   r) $\{8 - \frac{2}{2^{n+1}-1} :\ n \in \mathbb{N}\}$

   s) $\{5^x :\ x \in \mathbb{Z}\}$

   t) $\{(-5)^x :\ x \in \mathbb{Z}\}$

   u) $\{n^n :\ n \in \mathbb{N}\}$

   v) $\{\frac{1}{n^n} :\ n \in \mathbb{N}\}$

   w) $\{\frac{3n+(-1)^n 5}{7n+8} : n \in \mathbb{N}\}$

Capítulo 3

Relaciones

En este capítulo introduciremos el concepto de relación sobre un conjunto. Este es un concepto importante en matemáticas. Para nosotros su mayor utilidad reside en que él se basa la definición de función que veremos en un capítulo posterior y por esto, si hay limitaciones de tiempo, basta leer hasta la sección 3.3. Como ejemplo del uso del concepto de relación, incluimos un breve introducción a la noción de grafo.

3.1. El producto Cartesiano

En esta sección introduciremos otra operación entre conjuntos. Sean A y B dos conjuntos ninguno de ellos vacío. Para cada $a \in A$ y cada $b \in B$ formamos el **par ordenado**

$$(a, b).$$

El elemento a se llama la primera **componente** del par ordenado (a, b) y b la segunda componente. La colección de todos los pares ordenado (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$ se llama el **producto Cartesiano** [1] de A por B y se denota por $A \times B$.

$$\boxed{A \times B = \{(a, b) :\ a \in A \text{ y } b \in B\}.}$$

Como su nombre lo indica, el orden en un par ordenado es importante pues dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si se cumple que $a = c$ y $b = d$.

$$\boxed{(a, b) = (c, d) \text{ si, y sólo si, } a = c \text{ y } b = d.}$$

[1] La palabra *Cartesiano* hace referencia al nombre del filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650) quién fué el creador de la geometría analítica.

Ejemplo 3.1. Veamos como se usa la definición de igualdad de pares ordenados. Mostraremos que $(a, b) = (b, a)$ si, y sólo si $a = b$. Debemos mostrar dos cosas: (i) Supongamos que $(a, b) = (b, a)$, entonces por la definición de igualdad de pares ordenados obtenemos que $a = b$. (ii) Supongamos que $a = b$, entonces las primeras y segundas componentes de (a, b) y (b, a) son iguales y por lo tanto $(a, b) = (b, a)$. $\square$

Ejemplos 3.2.

1. Sea $A = \{1, 2\}$ y $B = \{p, q, r\}$ Entonces tenemos que

$$A \times B = \{(1, p), (1, q), (1, r), (2, p), (2, q), (2, r)\}.$$

2. Sea $A = B = \{1, 2\}$ Entonces

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

   Observe que $(1, 2) \neq (2, 1)$ a diferencia de lo que ocurre con los conjuntos donde el orden no es importante, pues $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. El par $(1, 1)$ es legítimo, en cambio el conjunto $\{1, 1\}$ es en realidad el conjunto $\{1\}$ pues no hace falta repetir los elementos. En algunos libros los pares ordenados se denotan por $< 1, 2 >$ para evitar una posible confusión con el intervalo $(1, 2)$ de la recta real. Nosotros mantendremos la notación más tradicional de (a, b) para pares ordenados pues el contexto siempre aclarará a qué nos estamos refiriendo.

3. El producto cartesiano de un conjunto A consigo mismo también se acostumbra denotar por A^2 en lugar de $A \times A$.

4. Si A tiene un sólo elemento, digamos $\{a\}$, también podemos formar $A \times B$ y obtenemos $\{a\} \times B = \{(a, b) : b \in B\}$.

$\square$

Los pares ordenados y el producto cartesiano son muy útiles para modelar situaciones reales. A continuación damos un ejemplo que ilustra lo que acabamos de decir.

Ejemplo 3.3. Si se tira dos veces una moneda al aire y convenimos en representar con la letra c si sale “cara” y con s si sale “sello”, entonces todos los resultados posibles son: cs, cc, ss y sc. Podemos usar el producto cartesiano $\{c, s\} \times \{c, s\}$ para representar todas las posibilidades

$$\{c, s\} \times \{c, s\} = \{(c, s), (c, c), (s, s), (s, c)\}.$$

$\square$

Ejemplo 3.4. Mostraremos que

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

Debemos verificar dos cosas:
(i) $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$ y
(ii) $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.

(i) Sea $(x, y) \in A \times (B \cup C)$, entonces $x \in A$ y $y \in (B \cup C)$. Luego hay dos casos a considerar:

Caso a: Supongamos que $y \in B$. Entonces como $x \in A$, se tiene que $(x, y) \in A \times B$, y por lo tanto $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

Caso b: Supongamos $y \in C$. Entonces como $x \in A$, se tiene que $(x, y) \in A \times C$, y por lo tanto $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

(ii) Sea $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. Entonces hay dos casos a considerar:

Caso a: Supongamos $(x, y) \in A \times B$. Entonces $x \in A$ y $y \in B$. Por lo tanto $y \in B \cup C$ y en consecuencia $(x, y) \in A \times (B \cup C)$.

Caso b: Supongamos $(x, y) \in A \times C$. Entonces $x \in A$ y $y \in C$. Por lo tanto $y \in B \cup C$ y en consecuencia $(x, y) \in A \times (B \cup C)$.

□

Ejemplo 3.5. Hay otra forma de presentar las demostraciones en el álgebra de conjuntos. El ejemplo anterior lo podemos presentar de la manera siguiente. Para probar la igualdad que queremos, debemos mostrar que

$$(x, y) \in A \times (B \cup C) \;\Leftrightarrow\; (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C).$$

Iremos mostrando una serie de equivalencias y la última de ellas será la deseada.

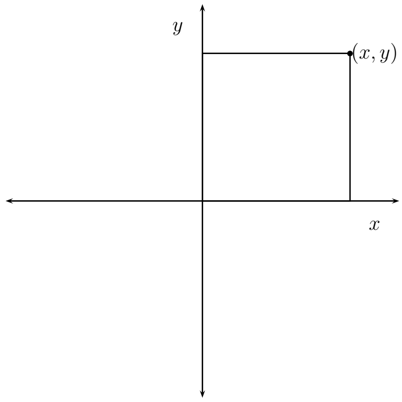
$$\begin{array}{rcl}
(x, y) \in A \times (B \cup C) & \Leftrightarrow & x \in A \;\text{ y }\; y \in B \cup C \\
& \Leftrightarrow & x \in A \;\text{ y }\; (y \in B \text{ ó } y \in C) \\
& \Leftrightarrow & (x \in A \text{ y } y \in B) \;\text{ ó }\; (x \in A \text{ y } y \in C) \\
& \Leftrightarrow & (x, y) \in A \times B \;\text{ ó }\; (x, y) \in A \times C \\
& \Leftrightarrow & (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C).
\end{array}$$

Observe que en el segundo y tercer paso hemos introducido los paréntesis para evitar ambigüedad lógica con los conectivos. En el tercer paso hemos usado la ley distributiva de la lógica proposicional que dice lo siguiente

$$p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

□

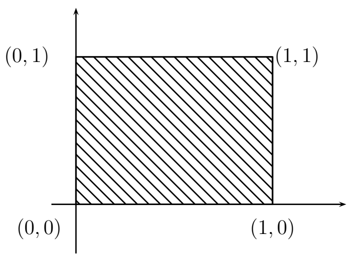
Ejemplo 3.6. *(El plano Cartesiano)* El conjunto $\mathbb{R}^2$ que consiste de todos los pares ordenados de números reales sirve para representar un plano. El conjunto $\mathbb{R}^2$ generalmente se representa por un sistema de coordenadas, llamadas precisamente coordenadas Cartesianas.



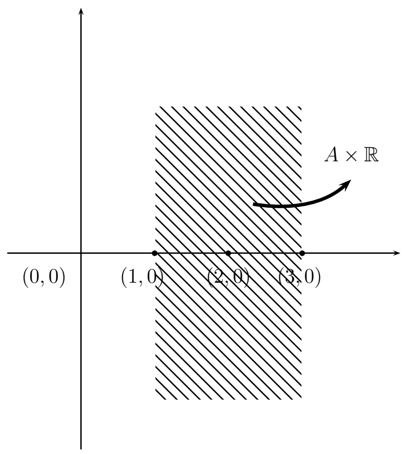
□

Ejemplos 3.7. Podemos definir subconjuntos interesantes de $\mathbb{R}^2$ usando $\times$.

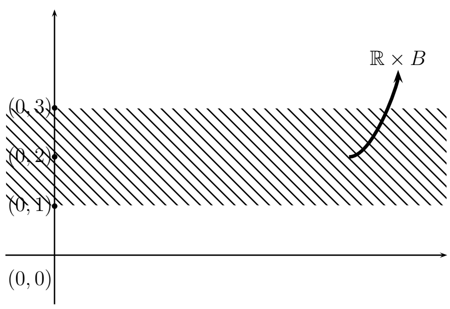
1. Consideremos el intervalo de la recta real $[0, 1]$ que consiste de todos los números reales x tales que $0 \leq x \leq 1$. El producto cartesiano $[0, 1] \times [0, 1]$ tiene una interpretación geométrica: un cuadrado de lado 1.



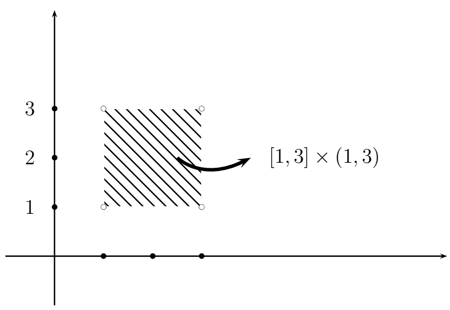
2. Sea A el intervalo cerrado $[1, 3]$ y B el intervalo abierto $(1, 3)$. El conjunto $A \times \mathbb{R}$ se representa de la siguiente manera.



y el conjunto $\mathbb{R} \times B$ se representa de la siguiente manera



Considere ahora el conjunto $(A \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times B)$.



□

Podemos formar el producto cartesiano de tres conjuntos: $A \times B \times C$. Para esto se introduce el concepto de una **tripleta ordenada** (a, b, c) donde $a \in A$, $b \in B$ y $c \in C$.

$$\boxed{A \times B \times C = \{(x, y, z) : \ x \in A, y \in B, z \in C\}.}$$

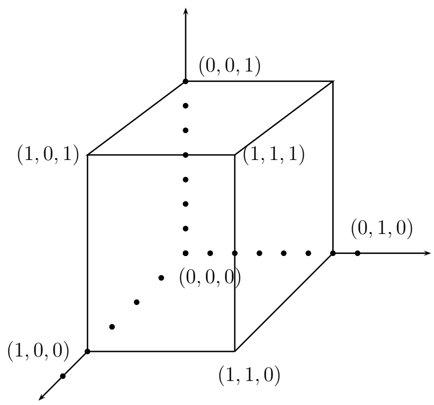
Al igual que con el producto cartesiano de dos conjuntos, se acostumbra a escribir

$$A^3.$$

en lugar de $A \times A \times A$.

Ejemplos 3.8. 1. (*El espacio tridimensional*) El conjunto $\mathbb{R}^3$ que consiste de todas las tripletas ordenadas de números reales se usa para representar el espacio tridimensional.

2. (*El cubo*) El conjunto $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ tiene una interpretación geométrica natural: El cubo de lado 1.



□

Ejercicios 3.1

1. Sean $A = \{1, 2\}$, $B = \{-1, -2, -3\}$, $C = \{a, b, c\}$, $D = \{4\}$ y $E = \{1, 2, 3\}$.

a) Determine por extensión los siguientes conjuntos

(i) $A \times B$	(ii) $A \times B \times C$	(iii) $B \times A$
(iv) $A \times C \times A$	(v) A^3	(vi) $B^2 \times D$

b) Muestre que $A \times B \subseteq E \times B$.

c) Muestre que $(A \times B) \cap (B \times B) = \emptyset$.

d) Muestre que $A \times B \neq B \times A$.

2. Represente en el plano Cartesiano los siguientes conjuntos

   a) $[0,4] \times [-1,2)$

   b) $(3,6) \times (3,7)$

   c) $(1,4] \times (3,+\infty)$

   d) $[0,2) \times \mathbb{R}$

   e) $\mathbb{R} \times [1,3]$

   f) $([0,2) \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times [1,3])$

3. ¿Cual figura geométrica se podría representar con los siguientes conjuntos?

   a) $[0,1] \times \{1\}$

   b) $[0,1] \times \{0\} \ \cup \ [0,1] \times \{1\} \ \cup \ \{0\} \times [0,1] \ \cup \ \{1\} \times [0,1]$

4. Mencionamos en el texto que un cubo se puede modelar con el conjunto

$$[0,1] \times [0,1] \times [0,1].$$

   ¿A que parte del cubo corresponden los siguientes conjuntos?:

   a) $[0,1] \times [0,1] \times \{1\}$

   b) $[0,1] \times \{1\} \times \{0\}$

   c) $\{1\} \times [0,1] \times [0,1]$

5. Sean A, B y C conjuntos, muestre las siguiente afirmaciones:

   a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,

   b) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$,

   c) Si $A \subseteq B$, entonces $A \times C \subseteq B \times C$,

   d) $A \times \emptyset = \emptyset$.

6. En los siguientes ejercicios daremos una "prueba" que debe ser corregida. Asigne una C si es completamente correcta, una I si es completamente incorrecta (es decir, si todas las afirmaciones hechas en la prueba son falsas o si la idea principal de la prueba es incorrecta) y una P si la respuesta es parcialmente correcta (es decir si algunas de las afirmaciones incluidas en la prueba son correctas). Justifique su respuesta si asigna P o I.

a) **Afirmación:** $(A \times B) \cup C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
"Prueba":

$$\begin{aligned} x \in (A \times B) \cup C \quad & \text{si, y sólo si} \quad x \in A \times B \;\text{ ó }\; x \in C \\ & \text{si, y sólo si} \quad x \in A \;\text{ y }\; x \in B \;\text{ ó }\; x \in C \\ & \text{si, y sólo si} \quad x \in (A \times C) \cup (B \times C) \end{aligned}$$

□

b) **Afirmación:** Si $A \times B = A \times C$ y $A \neq \emptyset$, entonces $B = C$.
"Prueba":

$$\frac{A \times B}{A} = \frac{A \times C}{A}$$

por lo tanto $B = C$ □

c) **Afirmación:** Si $A \times B = A \times C$ y $A \neq \emptyset$, entonces $B = C$.
"Prueba": Mostraremos primero que $B \subseteq C$. Sea $b \in B$. Como $A \neq \emptyset$ escogemos $a \in A$. Entonces $(a, b) \in A \times B$. Luego por hipótesis tenemos que $(a, b) \in A \times C$ y por lo tanto $b \in C$. Esto muestra que $B \subseteq C$. La prueba de que $C \subseteq B$ es análoga. □

7. Todos los conceptos usados en matemáticas pueden ser expresados en términos de conjuntos. Por ejemplo, el concepto de par ordenado puede ser definido de la manera siguiente: Dados $a \in A$ y $b \in B$, se define $< a, b >$ (usaremos provisionalmente esta notación) como el conjunto

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Esta definición satisface la propiedad fundamental de los pares ordenados, a saber,

$$< a, b > = < c, d > \text{ si, y sólo si, } a = c \text{ y } b = d.$$

a) Sea $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$. Determine todos los elementos de $\{< a, b >: \; a \in A \text{ y } b \in B\}$.

b) Muestre que para cada $a \in A$ y $b \in B$ se cumple que $< a, b > \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$

c) Muestre que $< a, b > = < c, d >$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

3.2. Relaciones

La noción de relación es usada frecuentemente en la vida diaria. Un ejemplo muy "familiar" es la relación "*ser padre de*". Veamos otros ejemplos de relaciones antes de introducir la definición matemática.

Ejemplo 3.9. Consideremos la colección C de todas las ciudades de Venezuela. Diremos que dos ciudades c y d están relacionadas si se puede viajar (no importa con que línea aérea) de c a d sin hacer escalas. Denotaremos este hecho con el símbolo cRd. Por ejemplo,

$$\text{Caracas } R \text{ Mérida} \;\text{ y }\; \text{Caracas } R \text{ Porlamar}$$

pero no es cierto que Mérida R Porlamar. Cada par de ciudades relacionadas c y d puede ser considerado como el par ordenado (c, d). La relación R la podemos entonces representar como el siguiente conjunto de pares ordenados:

$$R = \{(c, d) \in C \times C : \text{ Existe un vuelo sin escalas de } c \text{ a } d\}.$$

Por ejemplo, tenemos que $(\text{Caracas}, \text{Mérida}) \in R$ y $(\text{Mérida}, \text{Porlamar}) \notin R$.

Las bases de datos de las líneas aéreas y agencias de viajes guardan la información sobre los vuelos de la manera en que la hemos presentado en este ejemplo (esas bases de datos se conocen como *bases de datos relacionales*). □

Ejemplo 3.10. Consideremos la relación $<$ de orden estricto entre números naturales. Podemos representar esta relación como una colección de pares ordenados de la manera siguiente:

$$R = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n < m\}.$$

Por ejemplo, $(3, 5) \in R$ y $(4, 2) \notin R$. Por supuesto que ésta no es la manera usual de expresar la relación de orden, pero nos sirve para motivar la definición que daremos a continuación. □

Los dos ejemplos que hemos presentado tienen en común que la relación en cuestión fue representada en términos de colecciones de pares ordenados y esto es la clave de la siguiente definición.

Definición 3.11. *Una **relación** entre dos conjuntos A y B es un subconjunto de $A \times B$. En este caso diremos que R es una **relación de** A **en** B.*

Observe que decir que R es una relación de A en B **no** es lo mismo que decir que R es una relación de B en A. Las relaciones entre *dos* conjuntos se conocen también por el nombre de **relaciones binarias**. Cuando A es igual a B diremos que R es una relación sobre A.

El concepto de relación incluye muchas posibilidades como veremos en los ejemplos a continuación.

Ejemplos 3.12.

1. Sea $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4)\}$. Tenemos que R es una relación entre A y B. Pero R no es una relación entre B y A.

2. El conjunto vacío es otro ejemplo de relación. Esta relación se dice que es trivial pues en realidad no relaciona a ningún elemento de A con ninguno de B.

3. Otro ejemplo de una relación de A en B consiste en tomar todos los pares ordenados $(a, b) \in A \times B$. Es decir, si ponemos R igual a $A \times B$, tenemos que R es una relación de A en B. Según esta relación cada uno de los elementos de A está relacionado con cada uno de los elementos de B (¿Puede imaginarse un ejemplo de la vida diaria donde se de esta situación?).

4. La relación de divisibilidad: sean a, b enteros con $a \neq 0$, diremos que a está relacionado con b (y escribimos $a|b$) si existe un entero k tal que $b = ka$. Por ejemplo, $3|6$ y $4 \not| 6$.

5. Sea A un conjunto cualquiera. Definimos una relación binaria entre A y $\mathcal{P}(A)$ de la manera siguiente
$$R = \{(x, B) \in A \times \mathcal{P}(A) : x \in B\}.$$
Entonces (x, B) está en R precisamente cuando $x \in B$. Es decir, $\in$ relaciona los elementos de A con los elementos de $\mathcal{P}(A)$.

   Por ejemplo, en el caso que $A = \{1, 2, 3\}$ tenemos que
$$(3, \{1, 3\}) \in R \text{ y } (2, \{1, 3\}) \notin R.$$

6. La relación de subconjunto $\subseteq$. Para adaptar este ejemplo a la defінción 3.11 trabajaremos con subconjuntos de un conjunto universal U. Definimos R de la manera siguiente:
$$R = \{(C, D) \in \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) : \; C \subseteq D\}.$$
Dados dos subconjuntos C, D de U, se cumple que $C \subseteq D$ si y solamente si $(C, D) \in R$. Observe que R es una relación sobre $\mathcal{P}(U)$.

   Por ejemplo, en el caso que $U = \mathbb{N}$, tenemos que
$$(\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}) \in R \text{ y } (\{1, 2\}, \{1, 3\}) \notin R.$$

□

Si R es una relación binaria, también escribiremos
$$xRy$$
cuando x e y están relacionados según R, es decir, si $(x, y) \in R$. Es muy frecuente que las relaciones se denoten con un símbolo especial. Por ejemplo la relación de orden estricto $<$, la relación de divisibilidad $|$, la de pertenencia $\in$, la de subconjunto $\subseteq$, etc.

En muchos casos es importante conocer cuáles elementos de A realmente están relacionados con algún elemento de B. Y también es útil saber para cuáles elementos de B existe alguno de A relacionado con él. Estas ideas las precisamos a continuación.

Definición 3.13. *Sea R una relación binaria entre los conjuntos A y B. El **dominio** de R, denotado por $dom(R)$, es el conjunto formado por todos aquellos elementos a de A tales que (a, b) está en R para algún b en B.*

*El **rango** de R, denotado por $rango(R)$, es el conjunto formado por todos aquellos elementos b de B tales que (a, b) está en R para algún a en A.*

Usando otra notación podemos expresar las nociones de rango y dominio de una relación de la siguiente manera:
$$\begin{aligned} dom(R) &= \{a \in A : \; aRb \text{ para algún } b \in B\} \\ rango(R) &= \{b \in B : \; aRb \text{ para algún } a \in A\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.14. Sea $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4)\}$. Entonces por inspección tenemos que $dom(R) = \{1\}$ y $rango(R) = \{3, 4\}$

Dejemos A y B como en ejemplo anterior, es decir, $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$. Pero ahora tomemos como R al conjunto $\{(1, 3), (2, 3)\}$. Entonces por inspección tenemos que $dom(R) = \{1, 2\}$ y $rango(R) = \{3\}$. Este ejemplo muestra que el rango y el dominio dependen de la relación R que estemos estudiando. □

Ejemplo 3.15. Consideremos la relación de orden estricto en $\mathbb{N}$. En términos de conjuntos tenemos que nuestra relación R viene dada por

$$R = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n < m\}.$$

Afirmamos que $dom(R) = \mathbb{N}$ y $rango(R) = \{n \in \mathbb{N} : 0 < n\}$. En efecto:

(1) $rango(R) = \{n \in \mathbb{N} : 0 < n\}$: Para mostrar la igualdad de estos dos conjuntos debemos mostrar dos cosas: (i) $rango(R) \subseteq \{n \in \mathbb{N} : 0 < n\}$ y (ii) $\{n \in \mathbb{N} : 0 < n\} \subseteq rango(R)$.

   (i) Sea $n \in rango(R)$. De la definición de rango se concluye que $n \in \mathbb{N}$ y también, y esto es lo m ás importante, que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(m, n) \in R$. Es decir, $m < n$. Por consiguiente $n \neq 0$, luego $n \geq 1$.

   (ii) Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, queremos ver que $n \in rango(R)$. Como $n \geq 1$, tenemos que $n - 1 \geq 0$, luego $n - 1 \in \mathbb{N}$ y además $n - 1 < n$. Por lo tanto, $(n - 1, n) \in R$. Es decir, $n \in rango(R)$.

(2) $dom(R) = \mathbb{N}$: De manera similar, mostraremos dos cosas: (i) $\mathbb{N} \subseteq dom(R)$ y (ii) $dom(R) \subseteq \mathbb{N}$.

   (i) Sea $n \in \mathbb{N}$, queremos mostrar que $n \in dom(R)$. En efecto, simplemente notemos que $(n, n + 1) \in R$ pues $n < n + 1$.

   (ii) De la propia definición de $dom(R)$ se deduce que $dom(R) \subseteq \mathbb{N}$.

□

Ejemplo 3.16. Sea R la relación de pertenencia definida entre elementos de un conjunto A y el conjunto de partes de A. Es decir,

$$R = \{(x, B) \in A \times \mathcal{P}(A) : \ x \in B\}.$$

Vemos que $dom(R) = A$, pues dado cualquier $a \in A$ tenemos, por ejemplo, que $(a, A) \in R$. Por otra parte, $rango(R) = \mathcal{P}(A) - \{\emptyset\}$, pues para ningún $a \in A$ se cumple que $(a, \emptyset) \in R$. □

Ejercicios 3.2

1. Determine el dominio y el rango de las siguientes relaciones.

   a) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$

b) $R = \{(-1,1), (-2,2), (-3,3), (-4,4), (-5,5)\}$

c) $R = \{(n, 2n) :\ n \in \mathbb{N}\}$

d) $R = \{(n, 2n+1) :\ n \in \mathbb{N}\}$

e) $R = \{(1,1), (1, \frac{1}{2}), (1, \frac{1}{3}), (1, \frac{1}{4}), (1, \frac{1}{5}), (1, \frac{1}{6}), (1, \frac{1}{7})\}$

2. Sea $A = \{0, 1, 2\}$. Definimos una relación R sobre A de la manera que se indica. Escriba R como un conjunto de pares ordenados y determine su dominio y su rango.

   a) nRm, si $n \leq m$.

   b) nRm, si $m \cdot n = 0$.

   c) nRm, si $m + n \in A$.

   d) nRm, si $m = \text{máx}\{n, 1\}$.

   e) nRm, si $m^2 + n^2 = 3$.

3. Considere la relación R de $\{1, 2\}$ en $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ dada por

$$R = \{(x, B) \in \{1, 2\} \times \mathcal{P}(\{1, 2\}) :\ x \in B\}.$$

   a) Determine todos los elementos de R.

   b) Determine el rango y el dominio de R.

4. Halle dos relaciones R y Q sobre $\{1, 2, 3\}$ tales que $dom(R) = dom(Q)$, $rango(R) = rango(Q)$ pero $R \neq Q$.

3.3. Relaciones reflexivas, simétricas y transitivas

Ahora nos restringiremos a estudiar relaciones binarias definidas entre los elementos de un mismo conjunto: aquellas relaciones de A en A (es decir el caso en que $A = B$ en la definición 3.11). En este caso diremos que R es una relación sobre A. ¿Cuántas relaciones se pueden definir sobre un conjunto? Una relación sobre A es, por definición, un subconjunto de $A \times A$. Por lo tanto, la colección de relaciones sobre un conjunto A es precisamente $\mathcal{P}(A \times A)$. Por esto existen tantas relaciones sobre A como elementos tenga $\mathcal{P}(A \times A)$. Ahora bien, ¿Cuantos elementos tiene $\mathcal{P}(A \times A)$? Veremos más adelante que si A tiene n elementos, entonces $A \times A$ tiene n^2 elementos. Por lo tanto $\mathcal{P}(A \times A)$ tiene 2^{n^2} elementos. Así que, si A tiene n elementos, entonces se pueden definir 2^{n^2} relaciones binarias sobre A. Por ejemplo, si A es $\{0, 1\}$, entonces existen exactamente 16 relaciones binarias sobre $\{0, 1\}$.

Cierto tipo de relaciones binarias aparecen con mucha frecuencia en Matemáticas y por esto han recibido un nombre especial. Introduciremos algunas de ellas a continuación.

Definición 3.17. *Sea R una relación binaria sobre un conjunto A.*

1. *Se dice que R es* ***reflexiva*** *si $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$. De manera equivalente, tenemos que R es reflexiva si*

$$aRa \text{ para todo } a \in A.$$

2. *Se dice que R es* ***simétrica*** *si cada vez que $(a, b) \in R$ entonces también se cumple que $(b, a) \in R$. Es decir*

$$\text{Si } aRb, \text{ entonces } bRa.$$

3. *Se dice que R es* ***antisimétrica*** *si cada vez que $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$, entonces se tiene que $a = b$. Es decir*

$$\text{Si } aRb \text{ y } bRa, \text{ entonces } a = b$$

4. *Se dice que R es* ***transitiva*** *si dados $a, b, c \in A$ tales que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces se cumple que $(a, c) \in R$. Es decir*

$$\text{Si } aRb \text{ y } bRc, \text{ entonces } aRc.$$

En la vida diaria usamos con frecuencia relaciones transitivas. Por ejemplo la relación *más temprano que* entre sucesos en el tiempo, *más pesado que* entre objetos, *dentro de* entre objetos son todas relaciones transitivas. También usamos relaciones que no son transitivas. Por ejemplo la relación *ser padre de* entre personas no es una relación transitiva. Algunos juegos usan reglas que dan lugar a una relación no transitiva. Por ejemplo, la regla del conocido juego infantil *Piedra (R), Papel (P) o Tijera (T)* establece que R le gana a T, T le gana a P , P le gana a R. Pero R no le gana a P y por lo tanto esta relación no es transitiva.

Ejemplo 3.18. Consideremos la relación R sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dada por

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}.$$

(a) R es reflexiva, pues para cada $a \in \{1, 2, 3, 4\}$ se cumple que $(a, a) \in R$.

(b) R no es simétrica, pues por ejemplo tenemos que $(1, 2) \in R$ pero $(2, 1) \notin R$.

(c) R es transitiva, para esto debemos verificar que si (a, b) y (b, c) están en R, entonces (a, c) también pertenece a R. Veamos algunos casos concretos. Por ejemplo, $(1, 2), (2, 4) \in R$ y vemos que $(1, 4)$ también pertenece a R. Otro ejemplo, $(1, 3), (3, 3)$ están en R y vemos que $(1, 3)$ también está en R. Por supuesto, los dos casos que hemos verificado no garantizan que la relación sea transitiva. Debemos verificar **todos** los casos posibles (esto lo dejamos al lector!). Otra manera, más fácil que la de verificar todos los casos posibles, de convencerse que R es transitiva es observando que R es en realidad la relación de divisibilidad entre los elementos de $\{1, 2, 3, 4\}$. En efecto, observe que para $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$, se cumple que

$$(a, b) \in R \text{ si, y sólo si } a \text{ divide a } b.$$

Ahora es más fácil convencerse que es R es transitiva, pues si a divide a b y b divide a c, entonces a divide a c. (Verifíquelo!).

(d) R es antisimétrica. Supongamos que $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$, entonces por una simple inspección vemos que necesariamente (a, b) es uno de los siguientes pares ordenados: $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ o $(4, 4)$. Esto muestra que R es antisimétrica.

$\square$

Ejemplos 3.19. 1. Consideremos la relación R sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ dada por

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (4, 1), (4, 4)\}.$$

Vemos que esta relación no es reflexiva, pues $(1, 1) \notin R$. No es simétrica, pues $(4, 1) \in R$ pero $(1, 4) \notin R$. Tampoco es transitiva, pues $(1, 2) \in R$ y $(2, 3) \in R$ pero $(1, 3) \notin R$. Por último, R es antisimétrica, pues no existe un par (a, b) tal que $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$.

2. Considere la relación $\subseteq$ sobre $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$. Esta relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva. La reflexividad se debe a que, como sabemos, para todo conjunto B se cumple que $B \subseteq B$. La transitividad fue mostrada en una sección anterior donde probamos que si $B \subseteq C$ y $C \subseteq D$ entonces $B \subseteq D$. Esta relación es antisimétrica, pues si $B \subseteq C$ y $C \subseteq B$ sabemos que esto implica que $B = C$. Y por último $\subseteq$ no es simétrica pues por ejemplo $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$ pero $\{1, 2\} \not\subseteq \{1\}$.

3. La relación de igualdad sobre un conjunto A. Podemos escribir esta relación de la manera siguiente
$$\{(a, b) \in A \times A : \ a = b\}.$$
Es claro entonces que esta relación consiste de los pares de la forma (a, a) para cada $a \in A$. Dejamos al lector la verificación de que esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva.

$\square$

Los ejemplos anteriores ilustran la forma en que mostraremos que una relación R **no** tiene alguna de las cuatro propiedades que estamos estudiando (reflexividad, transitividad, simetría o antisimetría). Lo que hicimos fué conseguir un contraejemplo de la propiedad en cuestión. Por ejemplo, para mostrar que una relación R no es transitiva debemos conseguir tres elementos a, b y c en el conjunto donde está definida la relación tales que (a, b) y (b, c) **estén** en R pero (a, c) **no** esté en R.

Ejercicio: Diga explícitamente (de manera similar a como lo hicimos en el párrafo anterior con la transitividad) qué se debe buscar para mostrar que una relación R no es reflexiva. Haga lo mismo para las propiedades de simetría y antisimetría.

Para mostrar que una relación tiene alguna de estas cuatro propiedades no podemos dar una "receta" general que funcione para todos los casos. En cada caso debemos analizar la relación dada y buscar la manera de mostrar la propiedad en cuestión. Por ejemplo, la transitividad de la relación del ejemplo 3.18 se puede mostrar analizando **todos** los casos posibles. Pero también podemos observar una caraterística particular de la relación R que facilita la verificación.

Los siguientes conceptos son de uso muy frecuente en Matemáticas

Definición 3.20. *Sea X un conjunto y R una relación sobre X.*
R es una ***relación de orden*** *si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.*
R es una ***relación de equivalencia*** *si R es reflexiva, simétrica y transitiva.*

Ejemplo 3.21.

1. La relación $\leq$ en $\mathbb{N}$ es una relación de orden. En efecto, para todo natural n tenemos que $n \leq n$, es decir $\leq$ es reflexiva. Si $n \leq m$ y $m \leq p$, entonces $n \leq p$, es decir $\leq$ es transitiva. Por último, si $n \leq m$ y $m \leq n$, entonces necesariamente tenemos que $n = m$. Por lo tanto $\leq$ es antisimétrica.
2. Otro ejemplo de orden es la relación de subconjunto $\subseteq$. Dejamos como ejercicio al lector verificar que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

□

Ejemplo 3.22. Considere la siguiente relación sobre $\mathbb{Z}$:

$$xRy \text{ si } y = x \text{ ó } y = -x.$$

Afirmamos que R es una relación de equivalencia. Es claro que R es reflexiva. Para verificar que es simétrica sean x, y enteros tales que xRy. Entonces tenemos dos alternativa: (i) $y = x$ y en este caso se cumple que yRx. (ii) $y = -x$ y en este caso se tiene que $x = -y$ y por lo tanto yRx. Falta verificar que R es transitiva. Dejamos al lector la tarea de convencerse que R es transitiva (simplemente observe que si tenemos tres enteros x, y, z con $x \neq y$, $y \neq z$, xRy y yRz, entonces necesariamente $x = z$).

□

Ejercicios 3.3

1. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ Considere las siguientes relaciones en X. ¿Cuáles son reflexivas?, ¿Cuáles son transitivas?, ¿Cuáles son simétricas? y ¿Cuáles son antisimétricas?. Determine su dominio y su rango.

   a) $R = \emptyset$
   b) $R = \{(1, 1)\}$
   c) $R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$
   d) $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$
   e) $R = X \times X$

2. Considere cada una de las siguientes relaciones en $\mathbb{Z}$. ¿Cuáles son reflexivas?, ¿Cuáles son transitivas?, ¿Cuáles son simétricas? y ¿Cuáles son antisimétricas?. Determine su dominio y su rango.

   a) $xRy \Leftrightarrow x + y < 3$
   b) $xRy \Leftrightarrow x + y = 1$

c) $xRy \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y$

d) $xRy \Leftrightarrow y = 2$

e) $xRy \Leftrightarrow x$ divide a y

f) $xRy \Leftrightarrow$ x e y son primos relativos

g) $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$ (donde $|x|$ es el valor absoluto de x)

3. Considere las relaciones entre personas: “ser padre de”, “ser hijo de”, “ser esposo de” y “ ser hermano de ”. Determine si son reflexivas, simétricas y/o transitivas.

4. Dos mujeres están sentadas en el poyo de una ventana. Al ver que se acercan dos hombres una de ellas dice:

   “ Allá vienen nuestros padres, padres de nuestros hijos, esposos de nuestras madres y nuestros propios maridos”.

   Explique si lo que la mujer dijo es posible. En que caso que lo sea, ¿que relación guardan entre si las dos mujeres?.

5. ¿Existirá alguna relación que sea a la vez simétrica y antisimétrica?

6. Sea R una relación sobre un conjunto A. Muestre que R es reflexiva si y sólo si $\{(a, a) : a \in A\} \subseteq R$.

7. En los siguientes ejercicios daremos una “prueba” que debe ser corregida. Asigne una C si es completamente correcta, una P si la respuesta es parcialmente correcta ó una I si es completamente incorrecta. Justifique su respuesta si asigna la “nota” P o I.

   a) **Afirmación:** Si la relación R es simétrica y transitiva, entonces también es reflexiva.
   “Prueba”: Ya que R es simétrica, tenemos que si $(x, y) \in R$, entonces $(y, x) \in R$. Luego como $(x, y), (y, x) \in R$ y R es transitiva, entonces $(x, x) \in R$ y por lo tanto R es reflexiva. □

   b) **Afirmación:** Si las relaciones R y S son transitivas, entonces la relación $R \cap S$ es transitiva.
   “Prueba”: Supongamos que $(x, y) \in R \cap S$ y $(y, z) \in R \cap S$. Entonces $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in S$. Luego $(x, z) \in R \cap S$. □

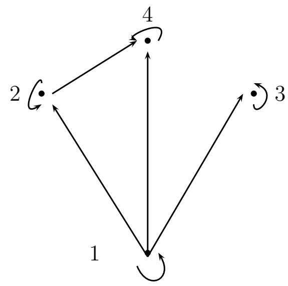
   c) **Afirmación:** Si las relaciones R y S son simétricas, entonces la relación $R \cap S$ es simétrica.
   “Prueba”: Sea
   $$R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (3, 2), (2, 3), (2, 2)\}$$
   y
   $$S = \{(2, 3), (3, 2), (2, 2), (3, 4), (4, 3)\}.$$
   Entonces $R \cap S = \{(2, 3), (3, 2), (2, 2)\}$. Tenemos que R, S y $R \cap S$ son simétricas.
   □

3.4. Grafos y Digrafos

Las relaciones binarias sobre un conjunto pueden ser representadas gráficamente a través de unos diagramas que se conocen como **digrafos**. Veamos un ejemplo: consideremos la relación R sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dada por

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}.$$

Ya vimos que R corresponde a la relación de divisibilidad sobre A. Para establecer el digrafo de esta relación, marcamos primero puntos o **vértices** que representan los elementos de A, en este caso debemos dibujar 4 puntos. A continuación, si un par (x, y) está en la relación, se traza una flecha (llamada **arco dirigido**) desde x hasta y. En nuestro caso, tenemos el siguiente digrafo

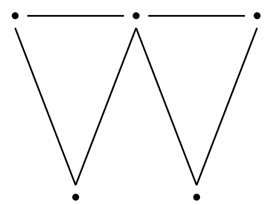


Las nociones de reflexividad, simetría y transitividad de una relación se pueden detectar observando los digrafos correspondientes. Por ejemplo, para que una relación sea reflexiva, en cada vértice de su digrafo debe existir un **lazo** (es decir, una arco de un vértice en sí mismo). Para que una relación sea simétrica, se debe cumplir que si existe una flecha de x a y, entonces también existe una de y a x. Para que la relación sea transitiva se debe cumplir que si existe un "camino" entre dos vértices x y z que sigan la dirección de las flechas debe existir la correspondiente flecha de x a z.

reflexividad   simetría   transitividad

En general un **grafo** es un conjunto de vértices y de **lados** o **aristas** entre los vértices (sin especificar la dirección). Así que los **di**grafos son los grafos donde se especifica la **di**rección de las aristas.

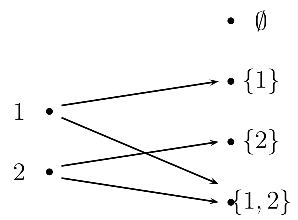
Ejemplo 3.23. El siguiente diagrama representa un grafo



Una relación binaria entre dos conjuntos A y B también la podemos representar gráficamente. En este caso ubicaremos el conjunto A a la izquierda, B a la derecha y dibujaremos flechas que salen de los puntos de A y terminan en los puntos de B de acuerdo a lo especificado por la relación. Veamos un ejemplo. Sea R la relación de pertenencia entre los elementos de $\{1, 2\}$ y sus subconjuntos. Es decir,

$$R = \{(x, A) \in \{1, 2\} \times \mathcal{P}(\{1, 2\}) : \ x \in A\}.$$

Podemos representar R con el siguiente diagrama:



Ejercicios 3.4

1. Haga el digrafo de la relación de prelación entre las siguientes asignaturas del pensum de Matemáticas: Matemáticas 10, 20 , 30 y 40; Fundamentos de Algebra 1 y 2; Geometría; Algebra Lineal 1 y 2; Análisis 1, 2 y 3.

2. Determinar explícitamente todas las relaciones binarias que puedan ser definidas sobre el conjunto $\{0, 1\}$. Haga el digrafo de cada una de ellas. Determine cuáles de ellas son reflexivas, simétricas, transitivas y/o antisimétricas.

3. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : \ 1 \leq n \leq 12\}$. Sea R la relación de divisibilidad entre los elementos de A, es decir $(x, y) \in R$ si x divide a y. Haga el digrafo de R.

4. Considere la siguiente relación sobre $\mathcal{P}(\{1, 2\})$

$$R = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\{1, 2\}) : \ A \cap B = \emptyset\}.$$

(i) Haga el digrafo de R.

(ii) Determine el dominio y el rango de R.

(iii) Determine si R es reflexiva, simétrica, transitiva o antisimétrica.

5. Considere la siguiente relación sobre $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$

$$R = \{(A,B) \in \mathcal{P}(\{1,2,3\}) : \ A \cap B \neq \emptyset\}.$$

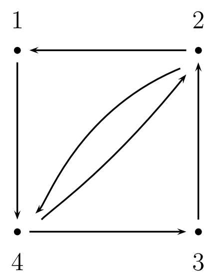
(i) Haga el digrafo de R.

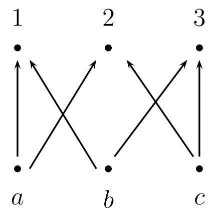
(ii) Determine el dominio y el rango de R.

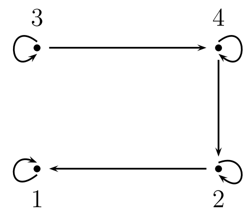
(iii) Determine si R es reflexiva, simétrica, transitiva o antisimétrica.

6. Considere la relación $\subseteq$ sobre el conjunto $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$. Haga el digrafo.

7. Escriba la relación correspondiente a cada digráfica de la figura.





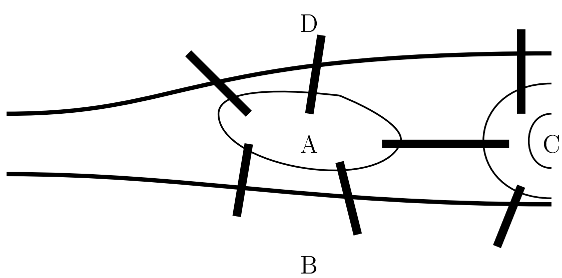


3.5. Aplicaciones de los grafos

Los grafos tiene mucha importancia por la gran variedad de sus aplicaciones. En esta sección presentaremos tres problemas que se resolvieron usando grafos.

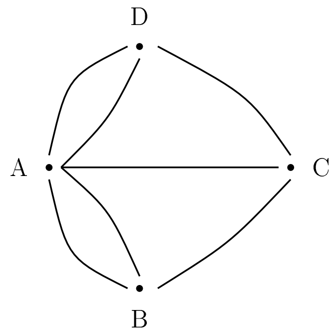
3.5.1. El problema de los puentes de Königsberg

El estudio de los grafos lo inició el matemático Leonhard Euler en 1736 resolviendo un viejo problema conocido como el *problema de los Puentes de Königsberg*. Dos islas que se hallan en el río Pregel en Königsberg (en la antigua Unión Soviética) están conectadas entre sí y con las márgenes del río por puentes como lo indica la figura.



El problema consiste en partir de cualquier lugar (A, B, C o D); seguir caminando y pasar por cada uno de los puentes exactamente una vez, y luego regresar al punto de partida. Tal ruta se llama un **circuito de Euler**.

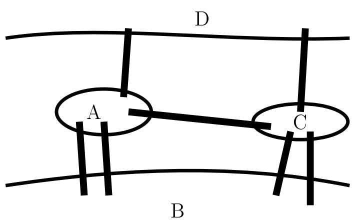
Euler representó este problema con un grafo donde los vértices corresponden a los lugares y los lados (arcos ó aristas) corresponden a los puentes.

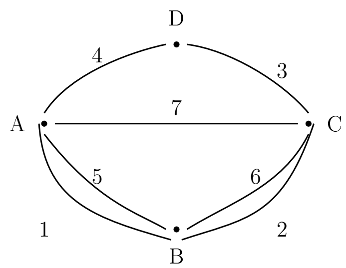


Euler demostró que no existe una solución para el problema de los puentes. De hecho mostró un resultado general sobre grafos que resuelve problemas similares al de los puentes de Königsberg. El método ideado por Euler para resolver este problema usa el concepto de la **valencia o grado** de un vértice. Se define la valencia de un vértice como el número de arcos que "tocan" al vértice. Por ejemplo, en el caso del problema de los puentes tenemos que las valencias de los vértices son: A tiene valencia 5, B, C y D tienen cada uno valencia 3. El teorema de Euler dice que para que exista un circuito de Euler es necesario que la valencia de cada vértice sea un número par. Como en el grafo asociado al problema de los puentes no se cumple esa condición, entonces no existe un circuito de Euler.

Euler también mostró que el recíproco es válido para cierto tipo de grafos. Diremos que un grafo es **conexo** si uno puede "viajar" entre dos vértices cualesquiera. Euler mostró que si la valencia de cada uno de los vértices de un grafo conexo es par, entonces en el grafo existe un circuito de Euler.

Consideremos ahora la siguiente situación.





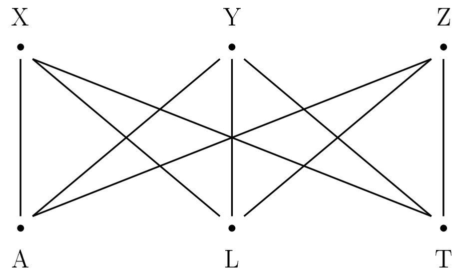
El digrafo correspondiente lo hemos dibujado a la derecha. En este caso si existe un circuito Euleriano. Por ejemplo,

$$A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{2} C \xrightarrow{3} D \xrightarrow{4} A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{6} C \xrightarrow{7} A.$$

En la vida diaria surgen problemas donde se requiere construir circuitos Eulerianos. Considere, por ejemplo, el problema de conseguir una ruta para un cartero da tal manera que el cartero recorra cada calle una sola vez (este problema se conoce como el *problema del cartero chino*).

3.5.2. El problema "Agua, Luz y Teléfono"

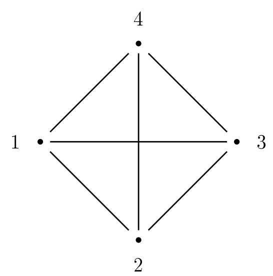
Imagínese que tenemos tres casas X, Y y Z a las que queremos instalar el servicio de agua (A), luz (L) y teléfono (T).

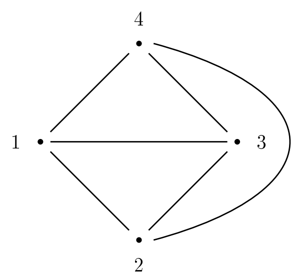


Quisiéramos hacer la instalación de tal forma que las líneas de luz y teléfono y las tuberías de agua no se crucen. ¿Es posible hacerlo? Para responder esta pregunta necesitaremos introducir otros conceptos sobre grafos.

En general en un grafo los lados pueden cruzarse. Los grafos que se pueden representar en un plano sin que se crucen su lados se llaman grafos **planos** o **planares**.

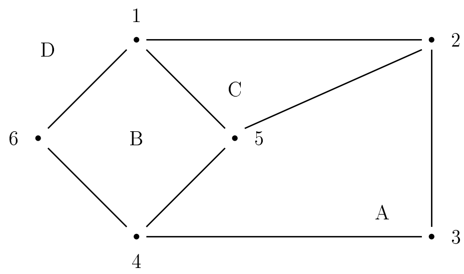
Por ejemplo, el grafo de la izquierda es planar, pues también lo podemos representar como en el diagrama de la derecha.





Podemos entonces enunciar el problema del Agua, Luz y Teléfono de manera equivalente preguntando si su grafo es planar. Si lo es, entonces la respuesta a la pregunta inicial es "si" y si no es planar entonces la respuesta es "no".

Cuando se representa en un plano un grafo conexo y plano, queda dividido en regiones contigüas llamadas **caras**. Por ejemplo, considere el siguiente grafo:



Hemos indicado sus 4 caras: A, B, C y D. Observe que D es la cara "exterior" del grafo. Euler notó que no importa como tracemos el grafo en un plano, el número de caras es el mismo. El número de caras (f) está determinado por el número de vértices (v) y el número de lados (e) mediante la fórmula siguiente

Fórmula de Euler para Grafos: Si G es un grafo plano, conexo, con e lados, v vértices y f caras, entonces

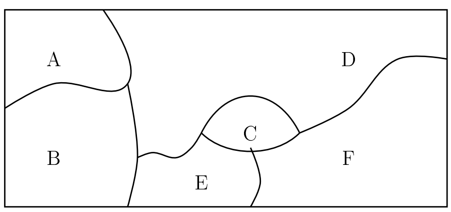
$$f = e - v + 2.$$

Por ejemplo, el grafo anterior tiene $f = 4$ caras, $e = 8$ lados y $v = 6$ vértices. Tenemos que $4 = 8 - 6 + 2$.

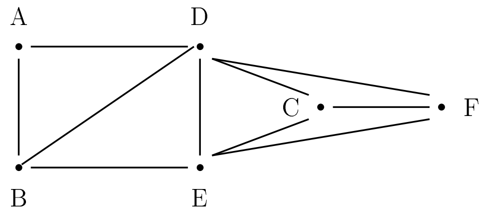
Usando esta fórmula es posible mostrar que el problema del Agua, Luz y Teléfono no tiene solución pues su grafo no es plano.

3.5.3. El problema de los cuatro colores

Cuando se colorea un mapa de países (o estados) se evita asignarle el mismo color a países que tengan frontera común. ¿Cuál es el mínimo número de colores que hace falta? La respuesta es que son suficientes cuatro colores. Esta pregunta estuvo sin responder desde el siglo XIX hasta que en 1976 Kenneth Apel y Wolfgang Haken la respondieron (por cierto, haciendo uso del computador). Para ver qué relación guarda este problema con los grafos, considere por ejemplo el siguiente mapa



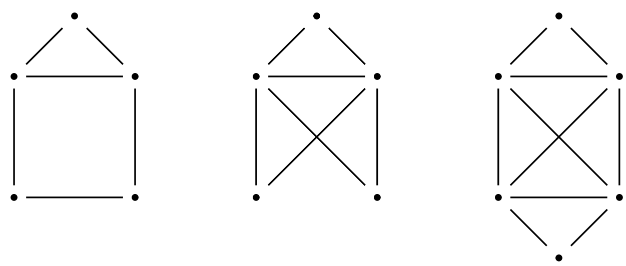
Le asociaremos un grafo a este mapa de la siguiente manera. A cada "país" le asociamos un vértice y colocamos un arco entre cada dos países que tengan frontera común. De esta manera obtenemos el siguiente grafo



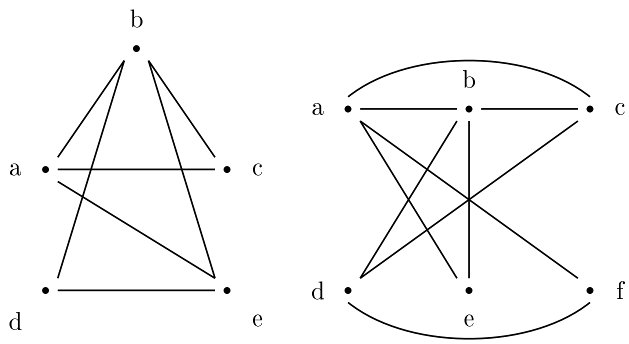
La pregunta original puede ser enunciada de manera equivalente en términos de grafos: ¿Cuántos colores son necesarios para colorear los vértices de un grafo de tal manera que dos vértices adyacentes no se les asigne el mismo color? Esta fué la pregunta que respondieron Apel y Haken.

Ejercicios 3.5

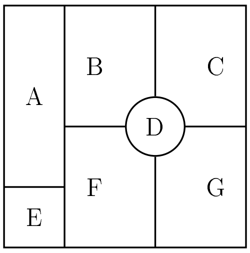
1. Considere los siguientes diagramas. Determine si existe un circuito de Euler.

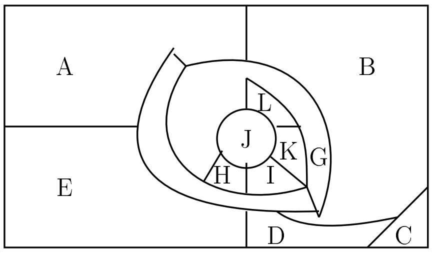


2. Los siguiente grafos son planares. Trácelos de tal manera que no se crucen sus aristas.



3. Coloree los siguiente mapas usando a lo sumo cuatro colores. Haga el grafo asociado a cada mapa.





Ejercicios suplementarios del capítulo 3

1. Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ y $C = \{5, 6, 7\}$. Determine por extensión los conjuntos: (a) $A^2 \times B$, (b) $B \times A^2$, (c) B^3 y (d) $A \times B \times C$.

2. Determine el rango de cada una de las siguiente relaciones. Determine también si son reflexivas, simétricas, antisimétricas y/o transitivas.

   a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \ x + y = 2\}$

   b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Q} : \ x \cdot y = 0\}$

   c) $R = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \ A \cup B \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

3. Haga el digrafo de las siguientes relaciones sobre $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y determine si son reflexivas, simétricas, antisimétricas y/o transitivas.

   a) xRy, si x divide a y.

   b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (5, 1)\}$

   c) xRy, si $x + y \leq 6$.

4. Muestre las siguientes afirmaciones

   a) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

   b) Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$, entonces $A \times C \subseteq B \times D$.

   c) $A \times B = \emptyset$ si, y sólo si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

   d) $(A \times B) \cap (A \times C) = \emptyset$ si y sólo si $B \cap C = \emptyset$ o $A = \emptyset$.

   e) Si $A \subseteq B$, entonces $C \times A \subseteq C \times B$.

5. Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Defina una relación sobre A que satisfaga lo indicado.

   a) Que no sea ni reflexiva, ni simétrica ni transitiva.

   b) Que sea reflexiva y no sea simétrica ni transitiva.

   c) Que no sea reflexiva, sea simétrica y no sea transitiva.

   d) Que no sea reflexiva, ni simétrica, pero sea transitiva.

   e) Que sea reflexiva y simétrica, pero no sea transitiva.

   f) Que sea reflexiva, no sea simétrica y sea transitiva.

   g) Que no sea reflexiva, sea simétrica y transitiva.

   h) Que sea reflexiva, simétrica y transitiva.

6. *a*) Sean R y S dos relaciones transitivas sobre un conjunto A. Muestre que $R \cap S$ es una relación transitiva sobre A. ¿Podemos decir lo mismo sobre la propiedad reflexiva y la propiedad simétrica?

b) Responda la misma pregunta pero ahora en relación a $R \cup S$.

7. Considere la siguiente relación sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: Diremos que A está relacionado con B si $A \triangle B$ es finito. Muestre que esta relación es transitiva.

8. Sea R una relación sobre un conjunto A. Para cada $x \in A$ definimos los conjuntos C_x y D_x de la manera siguiente:

$$C_x = \{z \in A : \ (x, z) \in R\} \qquad\qquad D_x = \{z \in A : \ (z, x) \in R\}.$$

a) Considere la relación R sobre $\{1, 2, 3\}$ dada por $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$. Determine C_1, C_2, C_3, D_1, D_2 y D_3 y muestre que

$$C_1 \cup C_2 \cup C_3 = rango(R) \qquad \text{y} \qquad D_1 \cup D_2 \cup D_3 = dom(R).$$

b) Para cada una de las relaciones del ejercicio 1 de §3.3 determinar C_x y D_x para cada $x \in \{1, 2, 3\}$.

c) Haga lo mismo que en la pregunta anterior pero ahora para cada una de las relaciones del ejercicio 2 de §3.3 (en este caso A es $\mathbb{Z}$).

Capítulo 4

Funciones

El concepto de función es quizá uno de los conceptos más importantes de la Matemática. Todas las teorías matemáticas hacen uso de las funciones. En este capítulo estudiaremos las propiedades básicas de las funciones.

4.1. El concepto de función como relación

Un caso especial y muy importante de relación entre dos conjuntos es el que corresponde a la noción de función.

Definición 4.1. *Una relación R entre dos conjuntos A y B se dice que es una* ***función de A en B*** *si satisface la siguiente condición:*

$$\text{Para todo } a \in A \text{ existe un único } b \in B \text{ tal que } aRb.$$

□

Observemos que en la definición de función se requiere que la relación cumpla con dos condiciones:

(1) Para cada elemento de $a \in A$ existe un elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$.

(2) El elemento b mencionado en la condición (1) es único.

Notemos que (1) nos dice que el conjunto A es el **dominio** de R y (2) nos asegura aún más, pues cada elemento de A está relacionado con un sólo elemento de B. El único elemento b al que a está asociado se le llama la **imagen** de a. Así que una función de A en B asigna a cada elemento de A uno de B y es por esto que las funciones también son llamadas **asignaciones**.

Ejemplos 4.2. 1. Sea $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ y $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$. Tenemos que R es una relación entre A y B. Pero R no es una función. Pues el 1 está relacionado con dos elementos de B, esto es, la condición (2) no se cumple. Observe que la condición (1) si se cumple en este ejemplo.

2. Sea $A = \{a, b, c\}$, $B = \{3, 4\}$ y $R = \{(a, 3), (b, 3)\}$. Tenemos que R es una relación entre A y B. Pero R no es una función. Pues el elemento c no está relacionado con ningún elemento de B, esto es, la condición (1) no se cumple.

3. Sea $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ y $R = \{(1, 3), (2, 4)\}$. En este caso R es una función. Pues para cada $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$.

□

Las funciones se denotan generalmente con las letras f, g, h y en lugar de escribir $a\ f\ b$ para indicar que a está relacionado con b se escribe

$$f(a) = b.$$

Diremos que $f(a)$ (que se lee "f de a") es la **imagen** de a bajo f. También se dice "la imagen de a por f" o que b es el "valor" que toma f en a. Para indicar que f es una función de A en B escribimos

$$f : A \to B.$$

Ya dijimos que A se llama el **dominio** de f y B se le llama **contradominio**. Un subconjunto de B que juega un papel importante en el estudio de las funciones es el **rango** el cual se define de la siguiente manera:

$$rango(f) = \{b \in B : \ b = f(a) \ \text{ para algún } a \in A\}$$

En general B no es igual al rango como veremos en los ejemplos. El rango de una función es entonces el conjunto formado por las imágenes de los elementos del dominio y es por esto que también se acostumbra llamarlo el **conjunto imagen**. El conjunto de todas las funciones de un conjunto A en un conjunto B se denota por

$$B^A.$$

Ejemplos 4.3. 1. Usualmente las funciones se presentan a través de una "regla" que asigna a cada elemento de A un único elemento de B. Por ejemplo, consideremos los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y la regla que asigna a cada número $a \in A$ el número $2a$. Usualmente expresamos la regla de asignación escribiendo

$$f(a) = 2a$$

pero también se acostumbra a escribir

$$a \mapsto 2a.$$

De esta manera hemos definido una función de A en B. El siguiente conjunto representa a f como un conjunto de pares ordenados:

$$\{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}.$$

2. Consideremos la regla $f(n) = n + 1$ que asigna a cada número natural n el número natural $n + 1$. Entonces $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función. Podemos expresar f como un conjunto de pares ordenados de la siguiente manera

$$\{(n, n+1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

3. Sea A un conjunto cualquiera y consideremos la asignación $i(a) = a$, entonces i es una función de A en A llamada la **función identidad** del conjunto A.

□

Para definir correctamente una función debemos especificar tres cosas:

(i) El dominio de la función.

(ii) El contradominio de la función.

(iii) La regla de asignación (o ley de correspondencia) entre los elementos del dominio y los del contradominio.

Al definir una ley de correspondencia es importante estar seguros de que en realidad los valores que le asignamos a cada elemento del dominio pertenecen al contradominio y además debemos verificar que a todo elemento del dominio le hemos asignado un elemento del contradominio.

Ejemplo 4.4. Considere la siguiente regla

$$x \mapsto \frac{x}{x-2}.$$

Con sólo esta información no tenemos bien definida una función. Pues no hemos especificado los valores que puede tomar la variable x. En otras palabras, debemos especificar el dominio de la función que queremos definir. Por otra parte, también debemos aclarar cuál es el contradominio de la función que estamos definiendo. Veamos algunas de las posibles alternativas:

(a) Sea $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \mathbb{Q}$ y $g(x) = \frac{x}{x-2}$. Entonces $g : A \to B$ es una función bien definida.

(b) Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \mathbb{Q}$ y $h(x) = \frac{x}{x-2}$. Entonces $h : A \to B$ no está bien definida pues existe un elemento del dominio que la regla $x \mapsto \frac{x}{x-2}$ no le asigna ninguna imagen (¿cuál es?).

(c) Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$, $B = \mathbb{R}$ y $f(x) = \frac{x}{x-2}$. Entonces $f : A \to B$ es una función bien definida.

□

¿Cuándo dos funciones son iguales? Para que dos funciones f y g sean iguales se debe cumplir las tres condiciones siguientes:

(i) El dominio de f es igual al dominio de g.

(ii) El contradominio de f es igual al contradominio de g.

(iii) f y g tienen igual ley de correspondencia. Es decir, para todo x en el dominio de f (que debe ser igual al dominio de g) se debe cumplir que $f(x) = g(x)$.

Ejemplos 4.5. 1. En el ejemplo 4.4 tenemos que las funciones f y g son distintas pues, aunque usan la misma ley de correspondencia, sus respectivos dominios no son iguales.

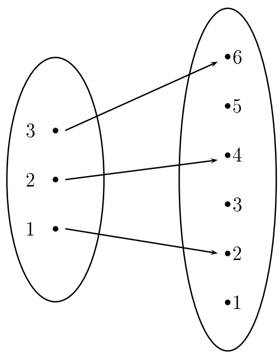
2. Considere las funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dadas por $f(n) = 3n + 3$ y $g(n) = 5n + 3$. Estas funciones no son iguales, pues por ejemplo $f(1) = 6$ y $g(1) = 8$, es decir las leyes de correspondencia no asignan la misma imagen al número 1.

$\square$

4.1.1. Representación gráfica de funciones

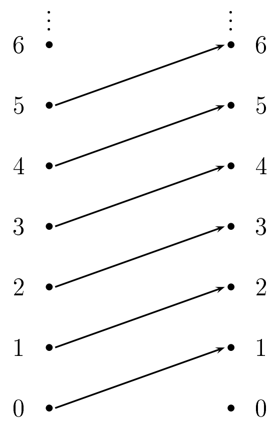
Como vimos en una sección anterior, las relaciones binarias se pueden representar con diagramas. En los ejemplos que presentamos a continuación veremos cómo se representan algunas funciones.

Ejemplo 4.6. Consideremos la función $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dada por $f(a) = 2a$. Podemos representar esta función con el siguiente diagrama:



$\square$

Ejemplo 4.7. Considere la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = n + 1$. Podemos representar esta función con el siguiente diagrama:



□

Ejemplo 4.8. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. La representación gráfica mas usada es la siguiente:

Incluir gráfica

□

4.1.2. Funciones por partes y funciones características

Existen diferentes maneras de definir funciones, pero lo importante es dejar bien claro cuál es su dominio, su contradominio y la ley de correspondencia.

Ejemplo 4.9. Considere la función $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 2x & , \text{si } x \text{ es par;} \\ 3x & , \text{si } x \text{ es impar.} \end{cases}$$

En este caso la imagen asignada a un elemento del dominio depende de si el número es par o impar. Por ejemplo, $h(0) = 0$, $h(2) = 4$, $h(4) = 8$, $h(1) = 3$, $h(3) = 9$, $h(5) = 15$, etc. Pero no hay ninguna duda sobre cómo determinar la imagen de cada número natural. Este tipo de función se dice que está *definida por partes*. □

Veremos en seguida un ejemplo importante de función definida por partes. Consideremos un subconjunto $A \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ cualquiera y definamos una función $f_A : \{1, 2, 3, 4\} \to \{0, 1\}$:

$$f_A(x) = \begin{cases} 0 & , \text{si } x \notin A; \\ 1 & , \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Observe que le hemos puesto el subíndice A a la notación de la función pues queremos indicar que la función está relacionada con el conjunto A. La función f_A se llama la **función característica de** A. Veamos algunos ejemplos:

(i) Para $A = \{1\}$ tenemos que $f_{\{1\}}(1) = 1$ y $f_{\{1\}}(2) = f_{\{1\}}(3) = f_{\{1\}}(4) = 0$

(ii) Para $A = \emptyset$, tenemos que $f_{\emptyset}(x) = 0$ para todo $x \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Las funciones características las podemos definir en general para cualquier conjunto U y cualquier subconjunto $A \subseteq U$ de la misma manera que los hicimos en el apartado anterior.

Definición 4.10. *Sea U un conjunto y A un subconjunto de U. La función característica de A es la función $f_A : U \to \{0, 1\}$ definida por*

$$f_A(x) = \begin{cases} 0 & , \textit{si } x \in U \setminus A; \\ 1 & , \textit{si } x \in A. \end{cases}$$

□

Ejemplo 4.11. Observemos que para cada U y cada $A \subseteq U$ tenemos una función.

1. Si $U = \mathbb{N}$ y $A = \{1, 3, 5, 7\}$, entonces

$$f_{\{1,3,5,7\}}(x) = \begin{cases} 0 & , \text{si } x \in \mathbb{N} \setminus \{1, 3, 5, 7\}; \\ 1 & , \text{si } x \in \{1, 3, 5, 7\}. \end{cases}$$

2. Si $U = \mathbb{R}$ y $A = (1, 5)$, entonces

$$f_{(1,5)}(x) = \begin{cases} 0 & , \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus (1, 5); \\ 1 & , \text{si } x \in (1, 5). \end{cases}$$

□

Ejercicios 4.1

1. Determine cuales de las siguientes relaciones entre $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{m, n, r\}$ son funciones. En caso que no sea una función diga porqué no lo es.

   a) $R = \{(1, m), (2, n)\}$,
   b) $T = \{(1, n), (2, r), (3, r)\}$,
   c) $S = \{(1, n), (2, r), (3, m), (3, n)\}$,
   d) $H = \{(1, m), (2, m), (3, m)\}$.

2. Determine si las siguientes relaciones definen una función de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. En caso que no lo sea diga porqué no lo es y en caso que sí lo sea halle la regla de correspondencia.

   a) $R = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ m \text{ divide a } n\}$,
   b) $R = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ m - n = 3\}$,
   c) $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), \cdots\}$,

d) $R = \{(n, 3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \; n \in \mathbb{N}\}$,

e) $R = \{(n, n^3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \; n \in \mathbb{N}\}$.

3. En cada caso determine las imágenes indicadas.

   a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, definida por $f(n) = -n$. Hallar $f(3)$ y $f(12)$.

   b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f(n) = 6$. Hallar $f(5)$ y $f(134)$.

   c) $f : \{0, 1, 2, 3, \cdots, 10\} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = (n-3)(n-6)$. Hallar $f(3)$ y $f(5)$.

   d) Sea $f : \{0, 1, 2, 3, \cdots, 10\} \to \{0, 1, 2, 3, \cdots, 10\}$ definida por partes de la manera siguiente
   $$f(x) = \begin{cases} x + 3 & , \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 10 - x & , \text{si } 4 \leq x \leq 10. \end{cases}$$
   Hallar $f(2)$ y $f(8)$.

   e) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $f(n) = (n+1, n+2)$. Hallar $f(25)$ y $f(1000)$.

   f) $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por $f(n) = \{n\}$. Hallar $f(5)$ y $f(13)$.

4. Determine si existe alguna función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfaga la condición que se indica. Justifique su respuesta.

   a) $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \; f(m) = n$,

   b) $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists m \in \mathbb{N} \; f(n) = m$,

   c) $\exists m \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N} \; f(m) = n$,

   d) $\exists n \in \mathbb{N} \, \forall m \in \mathbb{N} \; f(m) = n$.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Suponga que f satisface que
   $$f(x)f(y) = f(x - y)$$
   para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y además que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Halle $f(1)$ y muestre que $f(x) = f(-x)$.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Suponga que f satisface que
   $$f(x) + f(x - 1) = x^2$$
   para todo $x \in \mathbb{R}$ y además que $f(1) = 1$. Halle $f(10)$.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Suponga que f satisface que
   $$f(x)f(y) = f(x + y)$$
   para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y además que $f(\frac{-1}{4}) = \frac{1}{4}$. Halle $f(1995)$.

8. *a*) Halle todas las funciones características de los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ (ver la definición 4.10. Note que en este caso $U = \{1, 2, 3\}$). Verifique que existen 8 funciones características.

b) Considere la función $g : \{1,2,3\} \to \{0,1\}$ definida por $g(1) = 1$, $g(2) = 0$ y $g(3) = 1$. ¿Existirá un subconjunto A de $\{1,2,3\}$ tal que $g = f_A$? Si la respuesta es "si", encuentre tal conjunto.

c) Para cada $A, B \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ demuestre que $A \neq B$ si, y sólo si $f_A \neq f_B$. (Ver la definición 4.10 con $U = \{1,2,3,4,5\}$. En este caso existen 32 funciones características, pero para responder la pregunta no hace falta hallarlas!).

4.2. Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

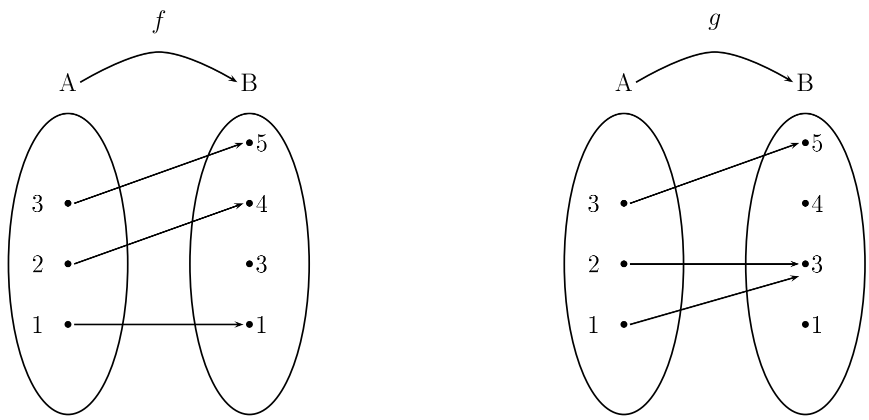
En esta sección estudiaremos tres conceptos básicos sobre funciones

4.2.1. Funciones inyectivas

Definición 4.12. *Sea f una función de A en B. Diremos que f es* ***inyectiva*** *si dados $a, a' \in A$ con $a \neq a'$, se tiene que $f(a) \neq f(a')$.*

A una función inyectiva también se le llama una función *uno a uno* (a veces se escribe: f es $1-1$). Este nombre se debe a que elementos distintos del dominio son "enviados" por la función a elementos distintos del contradominio. La inyectividad tiene una interpretación en términos del grafo de la función: *A cada elemento del contradominio le llega a lo sumo una flecha.* Como lo ilustraremos en los ejemplos a continuación..

Ejemplo 4.13. Consideremos los conjuntos $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,3,4,5\}$. En los diagramas que siguen se tiene que la función f es inyectiva y la función g no lo es.



□

Podemos expresar el concepto de inyectividad de la manera siguiente:

Sea $f : A \to B$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) f es inyectiva.
(ii) Para todo $a, a' \in A$, si $f(a) = f(a')$, entonces $a = a'$.

Dejamos la verificación de este hecho al lector (ver ejercicio 9). En los siguientes ejemplos haremos uso de esta caracterización de la inyectividad.

Ejemplo 4.14. Considere la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = n+1$. Mostraremos que f es inyectiva. Usaremos el criterio de inyectividad enunciado en el recuadro anterior. Fijemos dos naturales n, m y supongamos que $f(n) = f(m)$. Debemos mostrar que $n = m$. En efecto, nuestra suposición nos asegura que $n+1 = m+1$. Restando 1 en ambos lados de la igualdad obtenemos que $n = m$. □

Ejemplo 4.15. Considere la función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $g(n) = n^2$. Mostraremos que g es inyectiva. Usaremos otra vez el criterio anterior. Debemos probar que

$$\text{Si } g(n) = g(m), \text{ entonces } n = m.$$

Es decir,

$$\text{Si } n^2 = m^2, \text{ entonces } n = m.$$

En efecto, fijemos $n, m \in \mathbb{N}$ y supongamos que $n^2 = m^2$. De esto tenemos que $n^2 - m^2 = 0$. Factorizando obtenemos que

$$(n+m)(n-m) = 0.$$

Hay dos casos a considerar: (i) $n + m = 0$ y (ii) $n - m = 0$. Como $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $n, m \geq 0$. Por lo tanto en el caso (i) tenemos que $n = -m$ y entonces necesariamente se cumple que $n = m = 0$. En el caso (ii) tenemos obviamente que $n = m$. □

En el ejemplo que sigue usaremos la definición original de inyectividad.

Ejemplo 4.16. Defina $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , \text{si } x < 0 \\ 3x + 1 & , \text{si } 0 \leq x. \end{cases}$$

Mostraremos que h es inyectiva. Tomemos dos enteros x, y distintos y mostremos que $h(x) \neq h(y)$. Hay cuatro casos posibles, los consideraremos por separado.

(i) Supongamos que $x < 0$ y $y < 0$. En este caso por la definición de h tenemos que $h(x) = 2x - 1$ y $h(y) = 2y - 1$. Como $x \neq y$ es claro que $2x \neq 2y$ y por lo tanto $2x - 1 \neq 2y - 1$. Es decir que $h(x) \neq h(y)$.

(ii) Supongamos que $x \geq 0$ y $y \geq 0$. En este caso por la definición de h tenemos que $h(x) = 3x + 1$ y $h(y) = 3y + 1$. Como $x \neq y$ es claro que $3x \neq 3y$ y por lo tanto $3x + 1 \neq 3y + 1$. Es decir que $h(x) \neq h(y)$.

(iii) Supongamos que $x < 0$ y $y \geq 0$. En este caso por la definición de h tenemos que $h(x) = 2x - 1$ y $h(y) = 3y + 1$. Como $x < 0$ entonces $2x - 1 < 0$ y como $y \geq 0$, entonces $3y + 1 \geq 0$. Por lo tanto $h(x) \neq h(y)$.

(iv) Supongamos que $y < 0$ y $x \geq 0$. Este caso se analiza como en el apartado anterior.

Hemos mostrado que en cada uno de los casos se cumple que $h(x) \neq h(y)$. Como estos cuatro casos son todos los posibles, podemos concluir que h es inyectiva. $\square$

Es importante tener claro cuando una función **no** es inyectiva. En el siguiente recuadro lo resaltamos:

> Sea $f : A \to B$ una función. Las afirmaciones (i) y (ii) son equivalentes
>
> (i) f **no** es inyectiva
> (ii) Existe un par de elementos $a, a' \in A$ tales que $a \neq a'$ y $f(a) = f(a')$.

Notemos entonces que para mostrar que una función **no es inyectiva** debemos conseguir **DOS** elementos del dominio que tengan la misma imagen.

Ejemplo 4.17. Consideremos la función $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dada por $h(n) = n^2$. Uno estaría tentado a rápidamente concluir del ejemplo 4.15 que h es inyectiva. Pero no es así. Notemos que h no es la misma función g del ejemplo 4.15, pues hemos modificado el dominio. En este caso para mostrar que h no es inyectiva debemos conseguir un par de elementos distintos n, m del dominio de h que tengan la misma imagen bajo h, es decir tales que $h(n) = h(m)$. Por ejemplo, $h(2) = 4 = h(-2)$. Por esta razón h no es inyectiva. $\square$

4.2.2. Funciones sobreyectivas

Ahora estudiaremos el concepto de sobreyectividad.

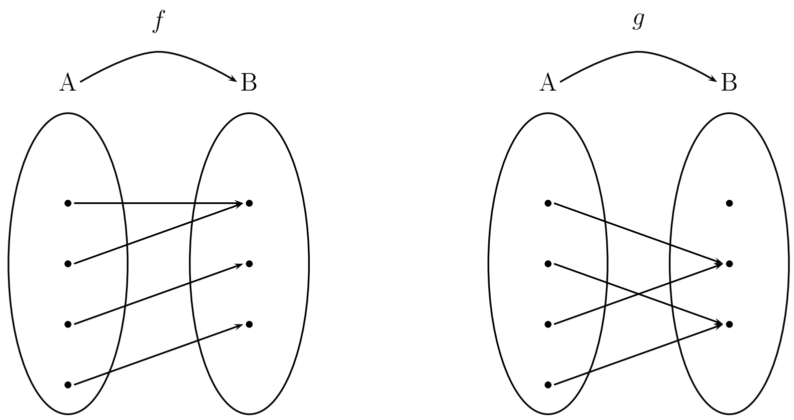
Definición 4.18. *Sea $f : A \to B$ una función. Diremos que f es* ***sobreyectiva*** *si dado $b \in B$ existe algún $a \in A$ tal que $b = f(a)$.*

Es claro que una función $f : A \to B$ es sobreyectiva cuando el rango de f es igual al contradominio. Esto lo resaltamos en el próximo recuadro.

> Sea $f : A \to B$ una función. Las afirmaciones (i) y (ii) son equivalentes
>
> (i) f es sobreyectiva
> (ii) $rango(f) = B$.

Cuando $f(x) = y$ se dice que y es la imagen de x y también diremos que x es una **preimagen** de y. En el caso que $y \notin rango(f)$, diremos que y no tiene preimagen.

Notemos que la sobreyectividad indica que en el grafo de la función *a todo elemento del contradominio le llega al menos una flecha (pero puede ser más de una)*. El primero de los diagramas que siguen corresponde a una función sobreyectiva, en cambio el segundo no.



Ejemplo 4.19. Considere la función $f : \{-1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1, 4\}$ definida por $f(x) = x^2$. Mostraremos que f es sobreyectiva. Debemos mostrar lo siguiente:

$$\text{Para todo } y \in \{0, 1, 4\} \text{ existe } x \in \{-1, 0, 1, 2\} \text{ tal que } f(x) = y.$$

Como el contradominio de f, el conjunto $\{0, 1, 4\}$, tiene sólo 3 elementos, podemos verificar esta afirmación con una simple inspección de todos los casos posibles.

(i) Para $y = 0$, en efecto existe $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$ tal que $f(x) = 0$, precisamente $x = 0$. Es decir, la preimagen del 0 es el 0.

(ii) Para $y = 1$, tenemos que en efecto existe $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$ tal que $x^2 = 1$. En realidad existen dos elementos del dominio que tiene imagen igual a 1: $f(1) = 1^2 = 1$ y $f(-1) = (-1)^2 = 1$. Es decir, 1 tiene dos preimágenes: 1 y -1.

(iii) Para $y = 4$, tenemos que $f(2) = 2^2 = 4$. Es decir, la preimagen del 4 es el 2.

Hemos entonces verificado que todo elemento del contradominio de f es la imagen de algún elemento del dominio de f. En otras palabras, el rango de f es $\{0, 1, 4\}$. □

Ejemplo 4.20. Sea $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida por $g(x) = 2x+1$. Mostraremos que g es sobreyectiva. Debemos mostrar lo siguiente:

$$\text{Para todo } y \in \mathbb{Q} \text{ existe } x \in \mathbb{Q} \text{ tal que } 2x + 1 = y.$$

Por ejemplo, tomando y igual a 4 es claro que $g(\frac{3}{2}) = 3+1 = 4$. Es decir, $\frac{3}{2}$ es una preimagen de 4. En este ejemplo no podemos mostrar la sobreyectividad de g analizando todos los casos posibles como lo hicimos en el ejemplo anterior, pues el contradominio de g tiene una cantidad infinita de elementos. Es por esta razón que necesitamos un argumento general.

Fijemos un elemento y cualquiera del contradominio, es decir $y \in \mathbb{Q}$. Queremos hallar x tal que

$$2x + 1 = y.$$

En muchos ejemplos para hallar tal x lo que hacemos es "despejar" x de una ecuación. En el ejemplo que estamos analizando tenemos que

$$2x = y - 1$$

y por lo tanto

$$x = \frac{y-1}{2}.$$

Es claro que $\frac{y-1}{2} \in \mathbb{Q}$ y ahora verificaremos que la imagen de $\frac{y-1}{2}$ es y. En efecto,

$$g\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = (y-1) + 1 = y.$$

$\square$

Ejemplo 4.21. Consideremos la función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f((n, m)) = n$. Mostraremos que f es sobreyectiva. Para entender mejor la definición de f calculemos algunas imágenes. Por ejemplo tenemos que

$$f((5,0)) = 5, \quad f((1,1)) = 1, \quad f((0,0)) = 0.$$

Esto nos dice que 5, 1 y 0 tienen (al menos una) preimagen, respectivamente $(5,0)$, $(1,1)$ y $(0,0)$. Como ya lo dijéramos, esto no es suficiente para garantizar que g es sobreyectiva. Debemos mostrar que dado **cualquier** elemento del contradominio $n \in \mathbb{N}$, existe un elemento del dominio $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $f((x, y)) = n$. Los ejemplos anteriores sugieren una respuesta. En efecto, notemos que

$$f((n,0)) = n$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$, esto dice que $(n, 0)$ es una preimagen de n y por lo tanto $n \in rango(f)$ para todo natural n.

Observemos que en el ejemplo anterior, el conjunto de preimágenes de cada elemento del contradominio es un conjunto infinito. Por ejemplo, las preimágenes del 3 son todos los pares ordenados que tienen la forma $(3, m)$, en símbolos,

$$\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ f((n,m)) = 3\} = \{(3,m) : m \in \mathbb{N}\}.$$

Esto nos dice que f está muy lejos de ser una función inyectiva. $\square$

Para determinar si una función es sobreyectiva es crucial poder conseguir su rango. En los próximos ejemplos calcularemos el rango de algunas funciones.

Ejemplo 4.22. Considere la función $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dada por $f(n) = 2n$. Entonces por simple inspección se verifica que el rango de f es el conjunto $\{2, 4, 6, 8\}$. $\square$

Ejemplo 4.23. Considere la función $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{x-2}.$$

Para hallar el rango de f debemos determinar cuales números reales son de la forma $\frac{x}{x-2}$. Para hacerlo consideremos la ecuación

$$\frac{x}{x-2} = y.$$

Debemos "despejar" x de esta ecuación. Tenemos entonces que

$$x = (x-2)y.$$

Luego

$$x - xy = -2y.$$

Y por lo tanto

$$x = \frac{-2y}{1-y}.$$

Usando esta última ecuación mostraremos que si $y \neq 1$, entonces y está en el rango de f. En efecto, sea $y \neq 1$, conseguiremos un real z tal que $f(z) = y$. Sea

$$z = \frac{-2y}{1-y}.$$

Verificaremos que $f(z) = y$. En efecto,

$$f(z) = \frac{\frac{-2y}{1-y}}{\frac{-2y}{1-y} - 2} = \frac{\frac{-2y}{1-y}}{\frac{-2y-2+2y}{1-y}} = \frac{-2y}{-2} = y.$$

Hemos mostrado que

$$\text{rango}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$\square$

Ejemplo 4.24. Considere la función $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por

$$f(A) = A \cup \{2, 3\}.$$

Mostraremos que el rango de f consiste de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que contienen al 2 y al 3. En efecto, sea $B \subseteq \mathbb{N}$ tal que $2, 3 \in B$. Observemos que

$$f(B) = B \cup \{2, 3\} = B.$$

Por esto B está en el rango de f. Observemos que para cada B que contenga al 2 y al 3 existen varios conjuntos A tales que $f(A) = B$. En efecto, tenemos que

$$f(B \setminus \{2,3\}) = (B \setminus \{2,3\}) \cup \{2,3\} = B,$$

$$f(B \setminus \{3\}) = (B \setminus \{3\}) \cup \{2,3\} = B,$$
$$f(B \setminus \{2\}) = (B \setminus \{2\}) \cup \{2,3\} = B.$$

Esto muestra que los conjuntos B, $B \setminus \{2,3\}$, $B \setminus \{2\}$ y $B \setminus \{3\}$ todos tienen como imagen a B. □

Es importante que también quede claro cuando una función **no** es sobreyectiva. En el siguiente recuadro lo resaltaremos.

Sea $f : A \to B$ una función. Las afirmaciones (i) y (ii) son equivalentes

(i) f **no** es sobreyectiva
(ii) Existe un elemento $b \in B$ tal que para ningún $a \in A$ se tiene que $b = f(a)$.

Notemos que para mostrar que una función **no es sobreyectiva** debemos encontrar **UN** elemento del contradominio que no tenga preimagen.

Ejemplos 4.25. 1. $f : \{0, 1, \cdots, 6\} \to \{0, 1, \cdots, 6\}$ definida por partes de la manera siguiente

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{, si } 0 \leq x \leq 2 \\ 7-x & \text{, si } 3 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

¿Será f sobreyectiva? Como el dominio de f tiene sólo 7 elementos es sencillo responder esta pregunta simplemente analizando por inspección todos los casos posibles. Vemos que

$$\text{rango(f)} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

De esto vemos que 5 no tiene preimagen y por lo tanto f no es sobreyectiva.

2. Podemos modificar el contradominio de la función dada en el ejemplo anterior y obtener otra función que sí sea sobreyectiva. Definimos $g : \{0, 1, \cdots, 6\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ usando la misma ley de correspondencia que la de f. Como el dominio de g es igual al de f y usamos la misma regla, entonces se tiene que $rango(g)$ es de nuevo $\{1, 2, 3, 4\}$ y por lo tanto g sí es sobreyectiva.

□

En el último ejemplo hemos usado un hecho general acerca de las funciones que enunciaremos a continuación.

Teorema 4.26. *Sea $f : A \to B$ una función. Defina $g : A \to rango(f)$ por $g(x) = f(x)$. Entonces g es sobreyectiva.* □

Ejemplo 4.27. Sea $f : (-1, -1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 3$. Afirmamos que f no es sobreyectiva. En efecto, notemos que si $x \in (-1, 1)$ entonces

$$-1 < x < 1$$

Multiplicando por 2 la desigualdad anterior obtenemos que

$$-2 < 2x < 2.$$

Ahora sumamos 3 a ambos miembros de la desigualdad anterior y obtenemos

$$1 < 2x + 3 < 5.$$

De esto se deduce que el rango de f está contenido en $(1, 5)$. Y por consiguiente podemos entonces concluir que f no es sobreyectiva pues, por ejemplo, 6 no tiene preimagen. Podemos de hecho hallar el rango de f. En efecto, afirmamos que

$$\text{rango(f)} = (1, 5).$$

Nos falta mostrar que $(1, 5) \subseteq \text{rango(f)}$. Sea $x \in (1, 5)$. Es decir, $1 < x < 5$. Entonces restando 3 obtenemos

$$-2 < x - 3 < 2.$$

Ahora dividiendo entre 2 obtenemos

$$-1 < \frac{x-3}{2} < 1.$$

Dejamos al lector la verificación que

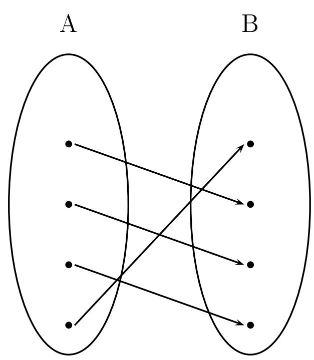
$$f\left(\frac{x-3}{2}\right) = x.$$

Con esto queda demostrado que todo $x \in (1, 5)$ tiene preimagen y por lo tanto que $(1, 5)$ es el rango de f. Definimos $g : (-1, 1) \to (1, 5)$ por $g(x) = 2x + 3$. El teorema 4.26 nos dice que g es sobreyectiva. □

4.2.3. Funciones biyectivas

Definición 4.28. *Diremos que f es* ***biyectiva*** *si es inyectiva y sobreyectiva.*

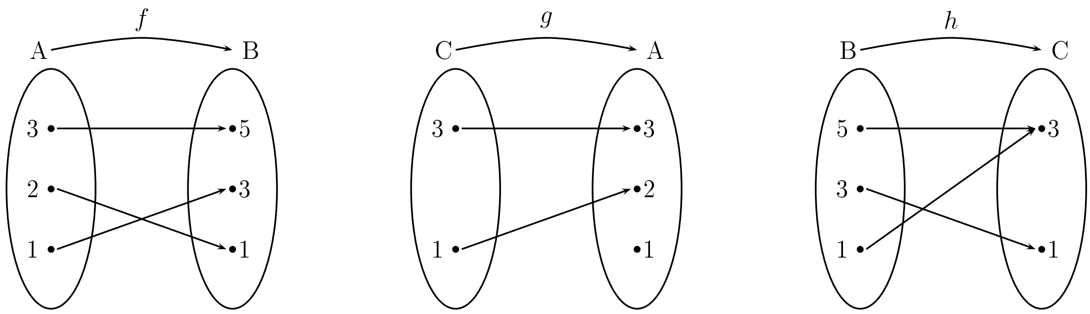
Una función es biyectiva cuando su digrafo tiene la propiedad que *a todo elemento del contradominio le llega una y sólo una flecha*, como se indica en el siguiente diagrama



Por esta razón se dice que una biyección establece una correspondencia biunívoca entre los elementos del dominio y del contradominio.

Las funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas son las herramientas básicas para comparar el número de elementos de dos conjuntos. Observando el digrafo de una función biyectiva $f : A \to B$ vemos que A y B tienen el mismo número de elementos. Ahora bien, si $f : A \to B$ es inyectiva, sólo podemos afirmar que B tiene al menos tantos elementos como A (pero puede suceder que B tenga más elementos que A). Por último, si $f : A \to B$ es sobreyectiva, sólo podemos afirmar que A tiene al menos tantos elementos como B (pero puede suceder que A tenga más elementos que B).

Ejemplo 4.29. Consideremos los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ y $C = \{1, 3\}$. Es fácil encontrar una función biyectiva de A en B, una inyectiva de C en A y una sobreyectiva de B en C. Como lo mostramos en los gráficos que siguen. Sin embargo, no es posible encontrar una inyección de A en C, ni tampoco una función sobreyectiva de C en A. En particular, esto nos dice además que no existe un función biyectiva entre A y C, lo cual es claro pues A tiene 3 elemento y C sólo 2 elementos.



□

Un hecho general que usaremos con frecuencia lo enunciamos a continuación.

Teorema 4.30. *Sea $f : A \to B$ una función inyectiva definimos $g : A \to rango(f)$ por $g(x) = f(x)$. Entonces g es biyectiva.* □

Terminaremos esta sección presentando algunos ejemplos de funciones biyectivas.

Ejemplos 4.31. 1. Consideremos los conjuntos $\{1, 2, 3\}$ y $\{a, b, c\}$. ¿Existirá una función biyectiva entre ellos? Es claro que sí . Por ejemplo, definimos la función $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ por $f(1) = a$, $f(2) = b$ y $f(3) = c$. Por una simple inspección vemos que f es inyectiva y sobreyectiva. De hecho existen 6 funciones biyectivas distintas entre estos dos conjuntos (ver ejercicio 2).

2. Consideremos los conjuntos $\{1,2,3,4\}$ y $\{0,1\}\times\{0,1\}$. ¿Existirá una función biyectiva entre ellos?. Recordemos que $\{0,1\}\times\{0,1\}$ consiste de los pares ordenado $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ y $(1,1)$. Podemos definir entonces una función $f:\{1,2,3,4\}\to\{0,1\}\times\{0,1\}$ de la manera siguiente: $f(1)=(0,0)$, $f(2)=(0,1)$, $f(3)=(1,0)$ y $f(4)=(1,1)$. De hecho, entre los conjuntos $\{1,2,3,4\}$ y $\{0,1\}\times\{0,1\}$ existen 24 funciones biyectivas distintas.

3. Una función biyectiva $f:\{1,2,3,\cdots,n\}\to B$ se puede ver como una enumeración de los elementos de B. Es decir, la función f sirve para "etiquetar" los n elementos de B. Observe el lector lo que se hizo en los ejemplos anteriores y verá que la regla de correspondencia implícitamente enumeró los elementos del contradominio.

4. Veamos ahora un ejemplo con conjuntos infinitos. Sea E el conjunto de todos los números pares, es decir, E consiste de todos los números naturales de la forma $2n$ con n otro natural. Definimos $f:\mathbb{N}\to E$ por $f(n)=2n$. Mostraremos que f es biyectiva. Debemos mostrar dos cosas:

   (i) f es inyectiva: sean $n,m\in\mathbb{N}$ y supongamos que $f(n)=f(m)$. Es decir, supongamos que $2n=2m$. De esto inmediatamente concluimos que $n=m$. Esto muestra que f es inyectiva.

   (ii) f es sobreyectiva: sea $k\in E$ cualquiera, entonces k es un número par. Por lo tanto k es de la forma $2n$ para un natural n. De esto vemos que la preimagen de k es n. Por ejemplo, $48\in E$ y $48=2\cdot 24$ así que 24 es la preimagen de 48.

□

Ejercicios 4.2

1. En cada uno de los ejercicios que siguen determine si existe (y en caso que sea posible, encuentre) una función $f:A\to B$ que sea (a) inyectiva, (b) sobreyectiva, (c) biyectiva.

   a) $A=\{1,2,3,4\}$ y $B=\mathcal{P}(\{1\})$.
   b) $A=\{1,2,3,4,5\}$ y $B=\{0\}\times\{1,2,3,4,5\}$.
   c) $A=\{1,2,3,4\}$ y $B=\mathcal{P}(\{0,1\})$.
   d) $A=\{1,2,3,4,5\}$ y $B=\mathcal{P}(\{0,1\})$.
   e) $A=\mathcal{P}(\{0,1,2\})$ y $B=\{1,2,\cdots,8\}$.
   f) $A=\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0,1\}$ y $B=\{0,1,2,\cdots,7\}$.

2. *a*) Hallar todas las funciones biyectivas que se puedan definir de $\{1,2,3\}$ en $\{a,b,c\}$. ¿Puede conseguir una función inyectiva entre estos conjuntos que no sea biyectiva?. ¿Existirá una función sobreyectiva entre estos conjuntos que no sea biyectiva?

   b) Halle una función inyectiva de $\{1,2,3\}$ en $\{a,b,c,d\}$. ¿Puede hallarla biyectiva?.

   c) Halle una función sobreyectiva de $\{a,b,c,d\}$ en $\{1,2,3\}$. ¿Puede hallarla inyectiva?.

3. Determine cuales de las siguientes funciones son inyectivas.

    a) Sea $A = \{0, 1, 2, \cdots, 10\}$ y $f : A \to A$ dada por $f(n) = 10 - n$. Haga el diagrama de f.

    b) $f : \{0, 1, 2, 3, \cdots, 10\} \to \{0, 1, 2, 3, \cdots, 10\}$ definida por partes de la manera siguiente
    $$f(x) = \begin{cases} x + 3 & , \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 10 - x & , \text{si } 4 \leq x \leq 10. \end{cases}$$
    (*Sugerencia:* Haga el diagrama de f).

    c) $f : \{0, 1, 2, 3, \cdots, 10\} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = n + 3$.

    d) $f : \{0, 1, 2, 3, \cdots, 10\} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = (n - 3)(n - 4)$.

    e) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, definida por $f(x) = 3$.

    f) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f(n) = 3^n$.

    g) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, definida por $f(n) = -n$.

    h) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f((n, m)) = m + n$.

    i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{2}{3}x - \sqrt{2}$.

    j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.

    k) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$.

4. Determine el rango de cada una de las funciones definidas en el ejercicios 3. Determine cuáles de ellas son sobreyectivas y cuáles son biyectivas.

5. Determine el rango de las siguientes funciones.

    a) $f : (-1, 3) \to (0, 7]$ dada por $f(x) = \frac{5}{4}x + \frac{13}{4}$.

    b) $f : (-3, -2) \to [4, 10)$ dada por $f(x) = 5x + 20$.

    c) $f : (-1, 0) \to (0, \frac{1}{4})$ dada por $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.

    d) $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

    e) $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{3x}{x-2}$.

6. Sea A un conjunto con 3 elementos y B un conjunto con 4 elementos. Determine cuáles de las siguiente afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifique sus respuestas

    a) Existe una función biyectiva de A en B.

    b) Existe una función inyectiva de A en B.

    c) Existe una función inyectiva de B en A.

    d) Existe una función sobreyectiva de A en B.

    e) Existe una función sobreyectiva de B en A.

7. Diremos que una función $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ es **creciente** si para todo $r, s \in \mathbb{Q}$ se cumple que
$$r \leq s \Rightarrow f(r) \leq f(s)$$
En este caso también se suele decir que f *preserva el orden*. Determine cuales de las siguientes funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ son crecientes.
    a) $f(r) = r^2$,
    b) $f(r) = 2r + 1$,
    c) $f(r) = \frac{r}{r^2+1}$,
    d) $f(r) = 5 - 4r$,
    e) $f(r) = r^3$.

8. Determine el rango de las siguientes funciones y si son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas.
    a) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $f(A) = A \cup \{0, 3, 7\}$
    b) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $f(A) = A \cap \{n \in \mathbb{N} : \; n \text{ es par}\}$
    c) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $f(A) = A \triangle \{0, 3, 7\}$.

9. Sea $f : A \to B$ una función. Verifique que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
    a) f es inyectiva.
    b) Para todo $a, a' \in A$ $(f(a) = f(a') \to a = a')$.

    (*Sugerencia:* Recuerde que una proposición condicional es lógicamente equivalente a su contrarrecíproca. Enuncie la contrarrecíproca de la proposición condicional que aparece en b)).

10. En los siguientes ejercicios daremos una "prueba" para que la evalúe y determine si es correcta. Justifique su respuesta.
    a) **Afirmación:** La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x + 5$ es inyectiva.
    "Prueba": Sean x, x' dos números reales con $f(x) \neq f(x')$. Entonces $3x+5 \neq 3x'+5$. Luego $3x \neq 3x'$ y por lo tanto $x \neq x'$. Esto muestra que f es inyectiva.
    b) **Afirmación:** La función $f : (1, 5) \to (8, 30)$ dada por $f(x) = 3x + 5$ es sobreyectiva.
    "Prueba": Considere la ecuación
    $$y = 3x + 5.$$
    Despejando x obtenemos que
    $$x = \frac{y - 5}{3}.$$
    Por lo tanto f es sobreyectiva.

11. Sean A, B, C, D conjuntos tales que $A \cap B = \emptyset$ y $C \cap D = \emptyset$. Sean $f : A \to C$ y $g : B \to D$ funciones inyectivas. Defina $h : A \cup B \to C \cup D$ de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{si } x \in A \\ g(x) & , \text{si } x \in B. \end{cases}$$

   a) Muestre que la función definida en 4.16 es un caso particular de este ejemplo (*Sugerencia*: Tome A como el conjunto de todos los enteros negativos y a B como el conjunto de los enteros no negativos. Así que $A \cup B = \mathbb{Z}$. Tome $C = A$ y $D = B$ y sean $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = 3x + 1$.)

   b) Muestre que h es inyectiva.

12. Modifique el ejercicio anterior y obtenga un criterio para determinar cuando una función definida por partes es sobreyectiva.

4.3. Composición de funciones

Cuando calculamos

$$2(5)^3$$

lo hacemos por partes: primero calculamos

$$5^3$$

que es igual a 125 y después calculamos

$$2(125)$$

que nos da el resultado final 250. Podemos ver esta secuencia de operaciones en términos de funciones. Consideraremos las funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dadas por

$$f(n) = n^3 \qquad \text{y} \qquad g(n) = 2n.$$

Es claro que $250 = g(125)$ y $125 = f(5)$ y de esto tenemos que

$$250 = g(f(5)).$$

Podemos entonces definir una nueva función, llamémosla h, a partir de f y g de la siguiente manera $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$h(n) = g(f(n)).$$

Podemos calcular con más precisión la regla de h. En efecto, $h(n) = g(n^3) = 2n^3$.

$$n \overset{f}{\mapsto} n^3 \overset{g}{\mapsto} 2n^3$$

Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ podemos de manera natural definir un función de A en C como se indica a continuación

$$a \mapsto g(f(a)).$$

Esta nueva función se llama la **compuesta** de f y g y se denota por

$$g \circ f$$

y su regla de correspondencia es

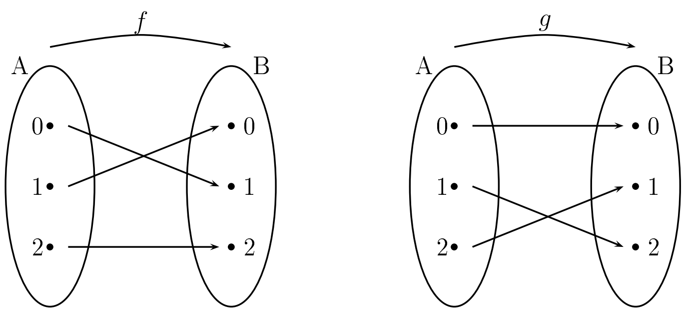
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Observe que el orden en que leemos $g \circ f$ es *"f compuesta con g"* y que es el inverso al de como lo escribimos [1]. La operación entre funciones así definida se denomina **composición** de funciones.

La composición de dos funciones se suele representar con cualquiera de los siguientes diagramas.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Ejemplo 4.32. Consideremos las siguientes funciones



Note que en este ejemplo particular podemos componer f con g y también g con f:

$$\begin{array}{rcccccl}
(f \circ g)(0) & = & f(g(0)) & = & f(0) & = & 1 \\
(g \circ f)(0) & = & g(f(0)) & = & g(1) & = & 2 \\
(f \circ g)(1) & = & f(g(1)) & = & f(2) & = & 2 \\
(g \circ f)(1) & = & g(f(1)) & = & g(0) & = & 0 \\
(f \circ g)(2) & = & f(g(2)) & = & f(1) & = & 0 \\
(g \circ f)(2) & = & g(f(2)) & = & g(2) & = & 1
\end{array}$$

Vemos entonces que $f \circ g \neq g \circ f$. □

[1] Esto es una convención. En algunos textos se acostumbra a leer $g \circ f$ como g compuesta con f.

Ejemplo 4.33. Consideremos las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definida por

$$f(n) = \frac{n}{n+2}$$

y $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida por

$$g(x) = x^2.$$

Entonces podemos componer f con g y obtenemos $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ dada por

$$(g \circ f)(n) = \left(\frac{n}{n+2}\right)^2.$$

Por ejemplo $(g \circ f)(4) = \frac{4}{16}$. □

Ejemplo 4.34. Considere $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dadas por

$$f(n) = n^3 \quad g(n) = 2n+4 \quad h(n) = n^2+2.$$

Podemos definir 9 funciones componiendo 2 de las anteriores.

$$\begin{array}{lclclclcl}
(f \circ g)(n) & = & f((g(n)) & = & f(2n+4) & = & (2n+4)^3 & & \\
(g \circ f)(n) & = & g(f(n)) & = & g(n^3) & = & 2n^3+4 & & \\
(f \circ h)(n) & = & f(h(n)) & = & f(n^2+2) & = & (n^2+3)^3 & & \\
(g \circ h)(n) & = & g(h(n)) & = & g(n^2+2) & = & 2(n^2+2)+4 & = & 2n^2+8 \\
(h \circ f)(n) & = & h(f(n)) & = & h(n^3) & = & (n^3)^2+2 & = & n^6+2 \\
(h \circ g)(n) & = & h(g(n)) & = & h(2n+4) & = & (2n+4)^2+2 & & \\
(f \circ f)(n) & = & f(f(n)) & = & f(n^3) & = & (n^3)^3 & = & n^9 \\
(g \circ g)(n) & = & g(g(n)) & = & g(2n+4) & = & 2(2n+4)+4 & = & 4n+12 \\
(h \circ h)(n) & = & h(h(n)) & = & h(n^2+2) & = & (n^2+2)^2+2 & = & n^4+4n^2+6
\end{array}$$

Podemos obtener otras funciones si componemos 3 o más, por ejemplo, $f \circ g \circ h$, $f \circ f \circ f \circ f$, etc.

□

Observación: Hemos definido la composición de funciones cuando $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Sin embargo, también se puede definir la compuesta $g \circ f$ cuando se cumple la siguiente condición:

$$f : A \to B, \; g : C \to D$$

y

$$\text{rango}(f) \subseteq C.$$

Lo importante es que dado $x \in A$ se cumpla que $f(x) \in C$ para que así tenga sentido la expresión $g(f(x))$. □

Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ tres funciones. Podemos definir

$$h \circ g : B \to D \quad \text{y} \quad g \circ f : A \to B.$$

También podemos definir

$$(h \circ g) \circ f : A \to D \quad \text{y} \quad h \circ (g \circ f) : A \to D.$$

El siguiente teorema dice que las dos últimas funciones son iguales. Es decir, la composición de funciones es una operación asociativa.

Teorema 4.35. *Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ tres funciones. Se tiene que*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Demostración: Ya que las dos funciones $(h \circ g) \circ f$ y $h \circ (g \circ f)$ tienen dominio A y contradominio D sólo resta verificar que tienen la misma ley de correspondencia. Sea x cualquier elemento de A, entonces

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

y por otra parte

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

Esto muestra lo deseado. □

Ejemplo 4.36. Considere $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dadas por $f(n) = n^3$, $g(n) = 2n+4$ y $h(n) = n^2+2$. Entonces usando los cálculos hechos en el ejercicio anterior tenemos que

$$\begin{array}{rclclcl} ((f \circ g) \circ h)(n) & = & (f \circ g)(h(n)) & = & (f \circ g)(n^2+2) & = & [2(n^2+2)+4]^3 \\ (f \circ (g \circ h))(n) & = & f((g \circ h)(n)) & = & f(2n^2+8) & = & [2n^2+8]^3 \end{array}$$

Observe que $[2(n^2+2)+4]^3 = [2n^2+8]^3$. □

Mostraremos ahora que la composición de funciones preserva la inyectividad, la sobreyectividad y por lo tanto también la biyectividad.

Teorema 4.37. *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Se cumple que*

1. *Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ también es inyectiva.*
2. *Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ también es sobreyectiva.*
3. *Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ también es biyectiva.*

Demostración:

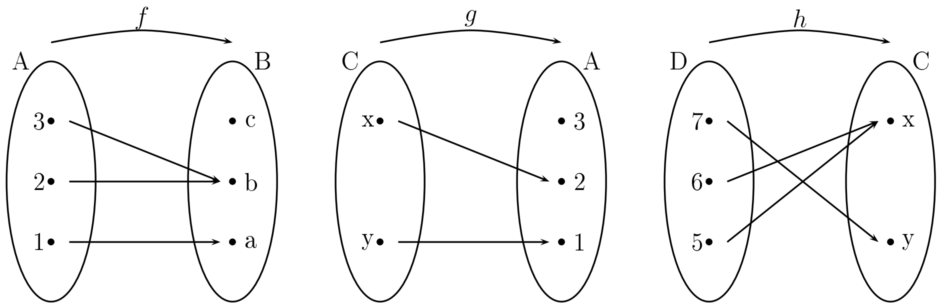
1. En efecto, sean $x, x' \in A$ con $x \neq x'$. Entonces como hemos supuesto que f es inyectiva, tenemos que $f(x) \neq f(x')$. Ahora como g también es inyectiva, entonces $g(f(x)) \neq g(f(x'))$. Es decir, $(g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(x')$.
2. En efecto, sea $z \in C$ cualquiera. Como g es sobreyectiva, entonces existe $y \in B$ tal que $g(y) = z$. Como $y \in B$ y f es sobreyectiva, entonces existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Afirmamos que $(g \circ f)(x) = z$, pues $(g \circ f)(x) = g((f(x)) = g(y) = z$.

3. Esto se deduce de las dos afirmaciones anteriores, pues si f y g son biyectivas, en particular son inyectivas y sobreyectivas.

$\square$

Ejercicios 4.3

1. Considere los siguientes diagramas que definen tres funciones:



   Haga el diagrama de $f \circ g$, $g \circ h$ y $(f \circ g) \circ h$.

2. Sean $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ las funciones definidas por $f(n) = 3n+2$, $g(n) = n^4$ y $h(n) = n+1$. Determine la ley de correspondencia de las siguientes funciones:

   a) $f \circ g$, $f \circ h$, $g \circ f$, $g \circ h$, $h \circ f$, $h \circ h$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

   b) $f \circ g \circ h$, $g \circ h \circ g$, $f \circ g \circ f$, $f \circ h \circ f$, $h \circ h \circ h$ y $h \circ g \circ f$.

3. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \tfrac{1}{1+x^2} \quad \text{y} \quad g(x) = \tfrac{1}{2+x^2}.$$

   Determine la ley de correspondencia de $f \circ g$ y $g \circ f$.

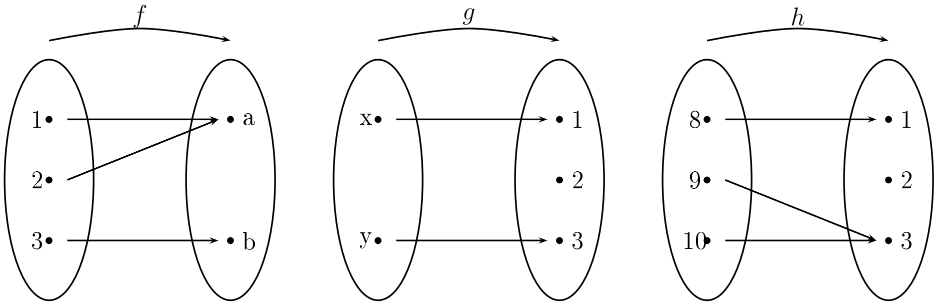
4. En cada uno de los siguientes ejercicios f es un función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Calcule la regla de correspondencia de $f \circ f$

   a)
$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , \text{si } x \leq 1 \\ 3x & , \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   b)
$$f(x) = \begin{cases} 5x-1 & , \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & , \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   c)
$$f(x) = \begin{cases} 6x+8 & , \text{si } x \leq 1 \\ 2-7x & , \text{si } x > 1 \end{cases}$$

5. Considere las siguientes funciones



(i) Verifique que $f \circ g$ es inyectiva (note que f no es inyectiva).

(ii) Verifique que $f \circ h$ es sobreyectiva (note que h no es sobreyectiva).

(iii) ¿Que relación guardan estos ejemplos con lo mostrado en el teorema 4.37?

6. Considere las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{si } x > 0 \\ 1 & , \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

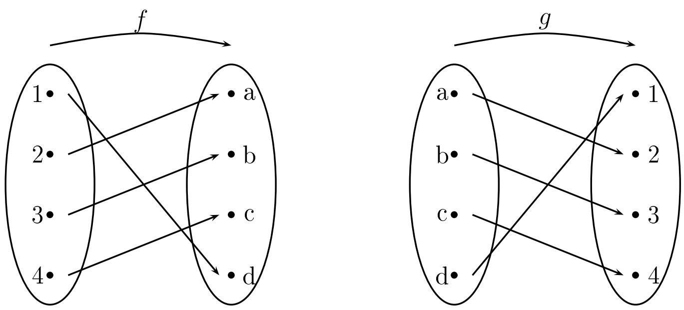
$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \text{si } x \geq 0 \\ 1 & , \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Determine $f \circ f$, $f \circ f \circ f$,... y $g \circ g$, $g \circ g \circ g$.... ¿Qué patrón observa?

4.4. La función inversa

Como dijéramos antes, una función biyectiva establece una correspondencia biunívoca entre los elementos del dominio y los del contradominio. En el siguiente ejemplo mostraremos algo muy importante acerca de las funciones biyectivas y la composición de funciones.

Ejemplo 4.38. El diagrama de la izquierda define una función $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c, d\}$ El diagrama de la derecha define una función $g : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ que se obtuvo invirtiendo el sentido de las flechas en el diagrama de f.



Podemos componer f con g y obtenemos la función $g \circ f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ y notamos que

$$(g \circ f)(x) = x, \quad \text{para cada } x \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Por otra parte, también podemos componer g con f y obtenemos la función $f \circ g : \{a, b, c, d\} \to \{a, b, c, d\}$ y notamos que

$$(f \circ g)(x) = x, \quad \text{para cada } x \in \{a, b, c, d\}.$$

Las funciones compuestas obtenidas reciben el nombre de **función identidad**, pues no alteran los elementos del dominio. Obsérvese que estas funciones no son iguales. La primera tiene dominio $\{1, 2, 3, 4\}$ y la segunda $\{a, b, c, d\}$. Las funciones identidad son sencillas pero cruciales para caracterizar las funciones biyectivas. Por esta razón le daremos una notación especial. Dado un conjunto cualquiera A, denotaremos por 1_A la función

$$1_A : A \to A$$

definida por

$$1_A(x) = x, \quad \text{para cada } x \in A.$$

Hemos usado el subíndice A para denotar la función identidad de A pues obviamente esta función depende del conjunto A. Es fácil verificar que la función identidad 1_A es inyectiva y sobreyectiva, es decir, es biyectiva.

Podemos expresar la propiedad que tiene la función g del ejemplo que estamos analizando diciendo que

$$g \circ f = 1_{\{1,2,3,4\}} \ \text{ y } \ f \circ g = 1_{\{a,b,c,d\}}.$$

$\square$

Las propiedades de la función g en el ejemplo anterior se deben a que f es biyectiva, como lo demostramos a continuación.

Teorema 4.39. *Sea $f : A \to B$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) f es biyectiva

(ii) Existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$.

Demostración: Para demostrar esta equivalencia debemos mostrar dos implicaciones.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Supongamos que (ii) se cumple. Es decir, supongamos que existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$. Primero mostraremos que f es inyectiva. Sean $x, x' \in A$ y supongamos que $f(x) = f(x')$. Queremos ver que $x = x'$. Como $g \circ f = 1_A$, entonces de la definición de composición de funciones obtenemos lo siguiente

$$\begin{array}{rclclcl} g(f(x)) & = & (g \circ f)(x) & = & 1_A(x) & = & x \\ g(f(x')) & = & (g \circ f)(x') & = & 1_A(x') & = & x'. \end{array}$$

Por hipótesis $f(x) = f(x')$, entonces obviamente

$$g(f(x) = g(f(x')).$$

De las igualdades de arriba obtenemos que $x = x'$, como queríamos demostrar.

Ahora mostraremos que f es sobreyectiva. Fijemos $y \in B$. Debemos hallar $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como $y \in B$, entonces $g(y) \in A$. Afirmamos que $g(y)$ es la preimagen de y bajo f. En efecto, como $f \circ g = 1_B$, entonces

$$f(g(y)) = y.$$

De esta manera hemos mostrado que f es biyectiva y por lo tanto que $(ii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Ahora supongamos que f es biyectiva y mostremos que (ii) se cumple. Para esto debemos definir una función $g : B \to A$ que tenga las propiedades deseadas. La idea para definir g es la misma que usamos para definir g en el ejemplo 4.38, es decir, g se define "invirtiendo las flechas" en el diagrama de f.

Veamos la función f como una relación de A en B. Es decir, consideremos el siguiente conjunto:

$$R = \{(x, f(x)) \in A \times B : \ x \in A\}.$$

Ahora "invirtamos" el orden y obtenemos

$$R' = \{(y, x) \in B \times A : \ (x, y) \in R\}.$$

Afirmamos que R' es una función. En efecto,

(i) Sea $y \in B$ cualquiera. Por ser f sobreyectiva, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Luego $(x, f(x)) = (x, y)$ y por definición de R tenemos $(x, y) \in R$. Por lo tanto $(y, x) \in R'$.

(ii) Supongamos que (y, x) y (y, x') ambas están en R'. Mostraremos que necesariamente $x = x'$. En efecto, de la definición de R' tenemos que $(x, y), (x', y) \in R$. Por lo tanto $f(x) = y$ y $f(x') = y$. Ahora como f es inyectiva, tenemos que $x = x'$.

Ya que R' es una función usaremos la notación de funciones y la denotaremos por g. Así que $g : B \to A$ y por la definición de R' tenemos que

$$g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Veamos que $g \circ f = 1_A$. En efecto, sea $x \in A$. Sea $y \in B$ tal que $y = f(x)$. Entonces tenemos por la igualdad anterior que

$$g(f(x)) = g(y) = x.$$

De igual manera se muestra que $f \circ g = 1_B$. □

Dada una función biyectiva $f : A \to B$, podemos preguntarnos si existirán dos funciones con las propiedades mencionadas en la parte (ii) del teorema 4.39. Si analizamos con cuidado la demostración de ese teorema, es natural pensar que no existen dos funciones con esas propiedades. Daremos una justificación más formal de esto que acabamos de decir. Supongamos que f es biyectiva y además que existen dos funciones $g, g' : B \to A$ ambas satisfaciendo lo dicho en (ii) de 4.39. Es decir que

$$g \circ f = g' \circ f = 1_A \ \text{ y } \ f \circ g = f \circ g' = 1_B. \tag{4.1}$$

Mostraremos que $g = g'$. Ya que estamos suponiendo que g y g' tienen el mismo dominio y contradominio, sólo debemos verificar que tienen la misma ley de correspondencia. Fijemos entonces $y \in B$ y mostremos que $g(y) = g'(y)$. Como f es biyectiva, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. De las ecuaciones (4.1) obtenemos que

$$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = x = (g' \circ f)(x) = g'(f(x)) = g'(y).$$

Es decir, $g = g'$.

En vista de esta propiedad que tienen la funciones biyectivas, se define la inversa de una función de la manera siguiente

Definición 4.40. *Sea $f : A \to B$ una función biyectiva. La **inversa** de f, que se denota por f^{-1} es la única función de B en A que satisface las dos condiciones siguientes*

$$f^{-1} \circ f = 1_A \ \ y \ \ f \circ f^{-1} = 1_B.$$

□

Observación: Es importante notar que si f es biyectiva, entonces f^{-1} también es biyectiva.

Ejemplo 4.41. Sea $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida por $g(x) = 2x + 1$. Ya vimos anteriormente que g es sobreyectiva. Verifiquemos que g es inyectiva. En efecto, supongamos que $g(x) = g(x')$, es decir, que $2x + 1 = 2x' + 1$. Si restamos 1 a ambos miembros y luego dividimos entre 2 obtenemos que $x = x'$. Por lo tanto g es biyectiva y tiene inversa. Usualmente la demostración de la sobreyectividad de la función da bastante información acerca de la regla de correspondencia de la inversa. Recordemos que mostramos que dado $y \in \mathbb{Q}$, se cumple que

$$g\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = (y-1) + 1 = y.$$

Esto nos dice que la inversa de g esta dada por

$$g^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}.$$

□

Ejemplo 4.42. Considere la función $f : (1, 4) \to (-13, -1)$ dada por

$$f(x) = 3 - 4x.$$

Mostraremos que f es biyectiva y calcularemos la ley de correspondencia de su inversa.

Supongamos que $f(x) = f(x')$, es decir, que $3 - 4x = 3 - 4x'$. De aquí se deduce inmediatamente que $x = x'$. Esto muestra que f es inyectiva.

Para ver que f es sobreyectiva. Consideremos la ecuación

$$y = 3 - 4x.$$

Despejando x obtenemos que
$$x = \frac{3-y}{4}.$$
Verificaremos que si $y \in (-13,-1)$, entonces $\frac{3-y}{4} \in (1,4)$. En efecto tenemos que
$$-13 < y < -1.$$
Luego multiplicando por -1 obtenemos
$$1 < -y < 13.$$
Sumando 3 obtenemos
$$4 < 3-y < 16.$$
Dividiendo entre 4 obtenemos
$$1 < \frac{3-y}{4} < 4.$$
Esto muestra que f es sobreyectiva. Además sugiere que la inversa de f es la función
$$f^{-1} : (-13,-1) \to (1,4)$$
dada por
$$f^{-1}(y) = \frac{3-y}{4}.$$
En efecto, tenemos que
$$(f \circ f^{-1})(y) = f\left(\frac{3-y}{4}\right) = 3 - 4\left(\frac{3-y}{4}\right) = y$$
y
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(3-4x) = \frac{3-(3-4x)}{4} = x.$$
□

Para terminar esta sección mostraremos una propiedad importante de las funciones identidad.

Teorema 4.43. *Sea $f : A \to B$ una función. Se tiene que*
$$1_B \circ f = f \quad \text{y} \quad f \circ 1_A = f.$$

Demostración: Mostraremos la primera igualdad, la otra queda como ejercicio. Es claro que $1_B \circ f$ y f tienen el mismo dominio y contradominio. Veamos que tienen la misma ley de correspondencia. Sea $x \in A$, entonces por definición de composición y de la función identidad 1_B tenemos que
$$(1_B \circ f)(x) = 1_B(f(x)) = f(x).$$
□

Ejercicios 4.4

1. Considere la siguientes funciones. Muestre que son biyectivas y halle su inversa.

   a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x + 5$

   b) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(x) = 5x - 8$

   c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x+2}{4}$

   d) $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ dada por $f(x) = \frac{3x}{x-2}$

   e) $f : \{0, 1, \cdots, 10\} \to \{0, 1 \cdots, 10\}$ definida por $f(x) = 10 - x$

   f) $f : (-1, 3) \to (2, 7)$ dada por $f(x) = \frac{5}{4}x + \frac{13}{4}$

   g) $f : (-1, 0) \to (0, \frac{1}{4})$ dada por $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

   h) $f : (-8, 8) \to (1, 2)$ dada por $f(x) = \frac{1}{16}(x - 8) + 2$.

2. Considere la siguiente función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{, si } x \text{ es par} \\ x - 1 & \text{, si } x \text{ es impar.} \end{cases}$$

   Muestre que f es biyectiva y halle su inversa. (*Sugerencia:* haga un esbozo del diagrama de f).

3. Defina una biyección de $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ en $\{1, 2, \cdots, 8\}$ y halle su inversa. (*Sugerencia:* Puede definirla usando un diagrama).

4. Defina una biyección de $\{1, 2, 3, 4\}$ en $\{a, b\} \times \{a, b\}$ y halle su inversa. (*Sugerencia:* Puede definirla usando un diagrama).

5. Sean A y B dos conjuntos, suponga que exista una función biyectiva de A en B. ¿Será cierto que existe una función biyectiva de B en A?

6. Sea $f : A \to B$. Muestre que

$$f \circ 1_A = f.$$

7. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$ funciones. Muestre las siguientes afirmaciones:

   a) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

   b) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

   c) Si $g \circ f = 1_A$, entonces f es inyectiva y g es sobreyectiva.

4.5. La imagen y la preimagen de un conjunto

Sea $f : A \to B$ y $C \subseteq A$. La **imagen** de C, que denotaremos por

$$f[C],$$

se define como el conjunto formado por las imágenes de los elementos de C. En símbolos

$$f[C] = \{f(x) : \ x \in C\}.$$

Notemos que cuando $C = A$ tenemos que $f[A]$ es precisamente el rango de f.

Ejemplo 4.44. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x + 2.$$

Sea $C = [0, 1)$. Afirmamos que

$$f[C] = [2, 3).$$

En efecto, tenemos que

$$f[C] = \{x + 2 : \ x \in [0, 1)\} = \{x + 2 : \ 0 \leq x < 1\} = [2, 3).$$

$\square$

Ejemplo 4.45. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^2.$$

Entonces tenemos que

$$f[(-1, 2)] = [0, 4) \qquad\qquad f[\{-2, -1, 2, 3\}] = \{1, 4, 9\}.$$

$\square$

Ejemplo 4.46. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 6 - 3x.$$

y $A = (1, 2]$. Sea $x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$1 < x \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq 4 - 3x < 3.$$

Por lo tanto $f[(1, 2]] = [0, 3)$.

$\square$

Dada una función $f : A \to B$ y un conjunto $D \subseteq B$ definimos la **preimagen** de D como el conjunto formado por todas las preimágenes de los elementos de D. La preimagen de un conjunto la denotaremos por

$$f^{-1}(D).$$

En símbolos tenemos que

$$f^{-1}(D) = \{x \in A : \ f(x) \in D\}.$$

Observación: Es importante notar que la preimagen de un conjunto está bien definida aún en el caso que f no sea biyectiva (y por lo tanto no tenga inversa). Aquí se abusa de la notación, pues se usa el símbolo f^{-1} aún cuando f no sea biyectiva. Al comienzo hay que prestar mas atención para no equivocarse: cuando se escribe $f^{-1}(D)$, NO se está implícitamente afirmando que f tiene inversa.

Cuando el conjunto D tiene sólo un elemento se usa la siguiente notación

$$f^{-1}(b).$$

Es decir

$$f^{-1}(b) = \{a \in A : \ f(a) = b\}.$$

Ejemplo 4.47. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 2 - x.$$

Tenemos que

$$f^{-1}(\{1,2,3,4,5\}) = \{1,0,-1,-2,-3\} \qquad f^{-1}((1,3]) = [-1,1)$$

$$f^{-1}(2) = \{0\} \qquad f^{-1}(4) = \{-2\}.$$

$\square$

Ejemplo 4.48. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^2 + 1.$$

Entonces tenemos que

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}((2,4]) & = & (1,\sqrt{3}] \cup [-\sqrt{3},-1) \\ f^{-1}(\{1,2,3,4,5\}) & = & \{0,\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{3},-\sqrt{3},2,-2\} \\ f^{-1}(7) & = & \{\sqrt{6},-\sqrt{6}\} \\ f^{-1}(\frac{5}{4}) & = & \{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\}. \end{array}$$

La preimagen de un conjunto puede ser vacía. Por ejemplo

$$f^{-1}((-3,0)) = \emptyset \qquad f^{-1}(\tfrac{1}{2}) = \emptyset.$$

$\square$

Ejercicios 4.5

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 1$. Halle los conjuntos que se indican.

   (a) $f[[1,3]]$, (b) $f^{-1}((-1,3])$, (c) $f[\mathbb{N}]$
   (d) $f[(1,4) \cup (\sqrt{27}, 15)]$ (e) $f^{-1}([5,20))$ (f) $f^{-1}((2,5) \cup [7,15])$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x - 1$. Halle los conjuntos que se indican.

   (a) $f[[1,3]]$, (b) $f^{-1}(\mathbb{R})$, (c) $f[\{1,2,3,4\}]$
   (d) $f[(1,15)]$ (e) $f^{-1}(\{1,2,3\})$ (f) $f^{-1}((0,\frac{1}{5}])$

3. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(n,m) = 2^n(2m+1) - 1.$$

   Halle los conjuntos que se indican

   a) $f^{-1}(\{1,2,3,4,5,6\})$
   b) $f[C]$ donde $C = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,3),(2,1),(3,2)\}$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x^2 + x + 1$. Defina una relación S sobre $\mathbb{R}$ dada por

$$(x,x') \in S \quad \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

   Muestre que S es una relación reflexiva, simétrica y transitiva (es decir, S es una relación de equivalencia).

5. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(n) = 3n + 1.$$

   Defina una función $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ de la siguiente manera

$$g(A) = f[A].$$

   a) Halle los conjuntos que se indican
   (a) $g(\{1,3,5\})$, (b) $g(\{2,4,6\})$, (c) $g(\{0,1,2,3,4\})$
   b) Muestre que g es inyectiva.

6. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = x^2 + 4$. Defina $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ por $g(A) = f[A]$. Muestre que g no es inyectiva.

7. Sea $f : A \to B$ una función

   a) Muestre que $f^{-1}(B) = A$.
   b) Sea $C \subseteq D \subseteq A$. Muestre que $f[C] \subseteq f[D]$
   c) Sea $E \subseteq F \subseteq B$. Muestre que $f^{-1}(E) \subseteq f^{-1}(F)$.

8. Sea $f : A \to B$ una función

a) Sea $C \subseteq A$. Muestre que
$$C \subseteq f^{-1}(f[C])$$

b) Sea $D \subseteq B$. Muestre que
$$f[(f^{-1}(D)] \subseteq D$$

c) Determine cuándo se cumple la igualdad en los ejercicios anteriores.

d) ¿Cuándo es correcto escribir $f^{-1}[f[C]]$?, para $C \subseteq A$.

9. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = 3n + 1$ defina $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ por
$$g(A) = f^{-1}(A).$$
¿Es g sobreyectiva? ¿Es g inyectiva?

10. Sea $f : A \to B$ una función. Defina $g : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ y $h : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ por
$$g(D) = f[D] \text{ con } D \subseteq A$$
y
$$h(E) = f^{-1}(E) \text{ con } E \subseteq B.$$
Es decir, $g(D)$ es la imagen de D bajo f y $h(E)$ es la preimagen de E bajo f. Muestre que

a) f es inyectiva si, y sólo si, g es inyectiva.

b) f es sobreyectiva si, y sólo si, g es sobreyectiva.

c) f es sobreyectiva si, y sólo si, h es sobreyectiva.

d) f es inyectiva si, y sólo si, $g(A \setminus D) = g(A) \setminus g(D)$ para todo $D \subseteq A$.

e) Si h es inyectiva, entonces f es sobreyectiva. ¿Es válido el recíproco?

Ejercicios suplementarios del capítulo 4

1. Determine si las siguientes reglas definen una función de $\mathbb{N}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

   a) $n \mapsto \{n\}$,

   b) $n \mapsto \{m : m \text{ es un múltiplo de } n\}$,

   c) $n \mapsto \{m \in \mathbb{N} : n \leq m\}$,

   d) $n \mapsto \emptyset$.

2. Determine las imágenes indicadas.

   a) $f : \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ dada por $f(A) = A \cup \{1,2\}$. Hallar $f(\emptyset)$ y $f(\{1,2\})$.

   b) $f : \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ dada por $f(A) = A \triangle \{1,2\}$. Hallar $f(\emptyset)$ y $f(\{1,3\})$.

   c) $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $f(n) = \{m \in \mathbb{N} : n \leq m\}$. Hallar $f(0)$ y $f(3)$.

   d) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por partes de la manera siguiente

   $$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{, si } x \text{ es par} \\ x & \text{, si } x \text{ es impar.} \end{cases}$$

   Hallar $f(2)$ y $f(3)$.

   e) $f : \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ dada por $f(A) = A \cap \{1,2\}$. Hallar $f(\emptyset)$ y $f(\{1,3\})$.

3. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función. Suponga que f satisface

   $$f(n) = (n-1)f(n-1)$$

   para todo $n > 1$ y también que $f(1) = 1$. Halle $f(4)$.

4. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función. Suponga que f satisface

   $$f(n) = n \cdot f(n-1) + 1$$

   para todo $n > 1$ y también que $f(1) = 997$. Halle $f(5)$.

5. En cada uno de los ejercicios que siguen determine si existe (y en caso que sea posible, encuentre) una función $f : A \to B$ que sea (a) inyectiva, (b) sobreyectiva, (c) biyectiva.

   a) $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$,

   b) $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{0\} \times \{1,2,3,4,5,\}$,

   c) $A = \mathcal{P}(\{0,1,2\})$ y $B = \{0,1,2,\cdots,7\}$,

   d) $A = \mathcal{P}(\{0,1\})$ y $B = \{0,1\} \times \{0,1\}$,

e) $A = \mathcal{P}(\{0,1,2\})$ y $B = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$,

f) $A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ divide a } 12\}$ y $B = \{1,2,3,4,5\}$.

6. Determine si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas. Determine el rango de cada una de ellas.

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f(n) = 3n + 2$.

b) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f((n,m)) = m$.

c) $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por $f(n) = \{n\}$.

d) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $f((n,m)) = m \cdot n$.

e) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definida por $f((n,m)) = (m,n)$.

f) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $f(n) = (1,n)$.

g) $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $f(n) = \{m \in \mathbb{N} : n \leq m\}$.

h) $f : \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ dada por $f(A) = A \triangle \{1,2\}$

i) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $f(A) = A \cup \{1,2,3,4\}$.

j) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $f(A,B) = A \setminus B$.

k) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $f(A,B) = A \triangle B$.

l) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por partes de la manera siguiente

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{, si } x \text{ es par} \\ x & \text{, si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

7. Muestre que la función dada es biyectiva y halle su inversa.

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ dada por $f(x) = \frac{x}{x-2}$

b) $f : (5,15) \to (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ dada por $f(x) = \frac{1}{60}(x+15)$.

c) $f : (-3,-2) \to (5,10)$ dada por $f(x) = 5x + 20$.

d) $f : \mathcal{P}(\{0,1,2\}) \to \mathcal{P}(\{0,1,2\})$ definida por $f(A) = A \triangle \{1\}$.

8. Sea $f : A \to B$ una función. Defina una relación S sobre A dada por

$$(x,x') \in S \quad \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

Muestre que S es una relación reflexiva, simétrica y transitiva (es decir, S es una relación de equivalencia).

9. Si X es un conjunto y $A \subseteq X$, entonces la función característica de A es una función $f_A : X \to \{0,1\}$. Por esto la siguiente función está bien definida.

$$H : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X$$

$$H(A) = f_A$$

Muestre que H es una biyección.

Capítulo 5

Cardinalidad

En este capítulo estudiaremos el concepto de cardinalidad de un conjunto. Este concepto es la versión matemática de la noción común de "número de elementos de un conjunto". Nuestro principal objetivo será el de comparar el número de elementos de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Aún cuando todos ellos son conjuntos infinitos, veremos que $\mathbb{R}$ tiene "más" elementos que los otros. Este descubrimiento, que los conjuntos infinitos no son todos de igual tamaño, lo hizo el matemático George Cantor a finales del siglo 19.

5.1. Conjuntos finitos y métodos de conteo

¿De cuántas maneras podemos ordenar 3 libros distintos en un estante? Designemos con las letras a, b y c los 3 libros. Podemos hacer una lista de todas las posibles ordenaciones:

$$\begin{array}{ccc} abc & acb & bac \\ bca & cab & cba \end{array}$$

Vemos entonces que hay 6 posibles maneras de ordenarlos. Ahora bien, si en lugar de 3 tenemos 1000 libros, no podemos hacer una lista exhaustiva de todas las posibilidades pues es un número extraordinariamente grande. Por esto se han desarrollado los *métodos de conteo*. En esta sección presentaremos algunos de estos métodos. Lo primero que haremos es precisar la noción de "un conjunto con n elementos". Aunque su significado es para todos intuitivamente claro, es importante que lo expresemos usando el lenguaje de las Matemáticas. Al igual que en todo proceso de medición (en el caso que nos ocupa, estamos interesados en medir el número de elementos de un conjunto) es fundamental fijar un patrón de referencia. El conjunto con n elementos que usaremos como patrón es $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ (¿que otro podría ser?). También es conveniente tener a la mano una notación práctica para trabajar con estos conceptos. Todo esto lo haremos a continuación.

Definición 5.1. *Sea A un conjunto y $n \geq 1$ un número natural. Diremos que A tiene n* ***elementos*** *si existe una función biyectiva $f : \{1, 2, 3, \cdots, n\} \to A$. En este caso escribiremos*

$$|A| = n.$$

Diremos que A es ***finito*** *si A es vacío o si tiene n elementos para algún n. Diremos que el conjunto vacío tiene 0 elementos.*

El lector debería convencerse que la definición que acabamos de dar captura la noción intuitiva de un conjunto con n elementos.

El símbolo $|A|$ se lee "el número de elementos de A", también se dice "la cardinalidad de $|A|$". La ecuación $|A| = |B|$, se lee "A y B tienen el mismo número de elementos" o " A y B tienen la misma cardinalidad".

Ejemplo 5.2. Sea $A = \{2, 4, a, b, 8\}$. Veamos que A satisface la definición de un conjunto con 5 elementos. Para esto debemos conseguir una función biyectiva de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ en A. En efecto, considere la siguiente regla

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & 2 \\ f(2) & = & 4 \\ f(3) & = & a \\ f(4) & = & b \\ f(5) & = & 8 \end{array}$$

□

Teniendo aclarado la noción de "número de elemento de un conjunto" o "cardinalidad de un conjunto finito" nos dedicaremos a estudiar sus propiedades. El primer resultado es sumamente útil.

Teorema 5.3. *Sean A y B dos conjuntos finitos. Si A y B son disjuntos (es decir, $A \cap B = \emptyset$), entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.*

Antes de dar la demostración de este resultado veremos un ejemplo.

Ejemplo 5.4. Sea $A = \{1, 4, 6\}$ y $B = \{3, 7, 8, 9\}$. Tenemos que $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B$ es igual a $\{1, 4, 6, 3, 7, 8, 9\}$ y $A \cup B$ tiene $3 + 4$ elementos.

Observe que es crucial que los conjuntos sean disjuntos. Por ejemplo, sea $C = \{1, 4, 6\}$ y $D = \{1, 7, 8, 9\}$. En este caso $C \cap D = \{1\}$ y $C \cup D$ tiene sólo 6 elementos. □

Demostración de 5.3: Sea $n = |A|$ y $m = |B|$. Primero observemos que en el caso en que A o B sea el conjunto vacío (es decir, si $n = 0$ o $m = 0$) en realidad no hay nada que demostrar; pues si $A = \emptyset$, entonces $A \cup B = B$ y por lo tanto $A \cup B$ tiene m elementos. Por esto supondremos que $n, m \geq 1$.

La hipótesis acerca de A y B nos asegura que existen dos funciones biyectivas: $f : \{1, 2, 3, \cdots, n\} \to A$ y $g : \{1, 2, 3, \cdots, m\} \to B$. La primera garantiza que A tiene n elementos y la segunda nos asegura que B tiene m elementos. Usando estas dos funciones tenemos que ingeniárnosla para definir una función

$$h : \{1, 2, 3, \cdots, n + m\} \to A \cup B$$

que sea biyectiva. Haremos la demostración para el caso particular $n = 4$ y $m = 7$. Dejaremos como ejercicio al lector escribir una demostración para el caso general (ver ejercicio 7).

Tenemos entonces dos funciones biyectivas

$$f : \{1, 2, 3, 4\} \to A \quad \text{y} \quad g : \{1, 2, 3, \cdots, 7\} \to B.$$

La definición de h es la siguiente

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{si } x \in \{1,2,3,4\} \\ g(x-4) & , \text{si } x \in \{5,6,\cdots,11\}. \end{cases}$$

A continuación verificaremos tres cosas: (i) h está bien definida. Es decir, verificaremos que h en realidad asigna a cada x en $\{1,2,\cdots,11\}$ un elemento de $A \cup B$, (ii) h es inyectiva y (iii) h es sobreyectiva.

(i) Sea $x \in \{1,2,\cdots,11\}$. Hay dos casos a considerar:

  (a) Si $x \in \{1,2,3,4\}$, entonces x pertenece al dominio de f y por lo tanto $f(x)$ está bien definida y así $h(x) \in A$ (y en consecuencia, $h(x) \in A \cup B$).

  (b) Si $x \in \{5,6,\cdots,11\}$, entonces es claro que $1 \leq x-4 \leq 7$. Es decir $x-4$ pertenece al dominio de g y por lo tanto $g(x-4)$ está bien definido. Además, en este caso $h(x) \in B$ y por lo tanto $h(x) \in A \cup B$.

(ii) *h es inyectiva.* Sean $x, x' \in \{1,2,\cdots,11\}$ con $x \neq x'$. Mostraremos que $h(x) \neq h(x')$. Como h está definida por partes consideraremos todos los casos posibles.

  1. $x, x' \in \{1,2,3,4\}$. En este caso $h(x) = f(x)$ y $h(x') = f(x')$. Como f es inyectiva y $x \neq x'$, entonces $f(x) \neq f(x')$ y por lo tanto $h(x) \neq h(x')$.
  2. $x, x' \in \{5,6,\cdots,,11\}$. Este caso es similar al anterior.
  3. $x \in \{1,2,3,4\}$ y $x' \in \{5,6,\cdots,,11\}$. En este caso $h(x) = f(x)$ y $h(x') = g(x'-4)$. Como $f(x) \in A$, $g(x'-4) \in B$ y por la hipótesis $A \cap B = \emptyset$, tenemos que $f(x) \neq g(x'-4)$. Por lo tanto $h(x) \neq h(x')$.
  4. $x' \in \{1,2,3,4\}$ y $x \in \{5,6,\cdots,,11\}$. Este caso se trata como se hizo con el tercer caso. Dejamos a cargo del lector completar los detalles.

  Hemos mostrado que en cada uno de los casos posibles $h(x) \neq h(x')$ por lo tanto h es inyectiva.

(iii) *h es sobreyectiva.* Fijemos $y \in A \cup B$ y mostremos que existe $x \in \{1,2,\cdots,11\}$ tal que $h(x) = y$. Tenemos dos casos a considerar

  1. $y \in A$. Como f es sobreyectiva, entonces existe $x \in \{1,2,3,4\}$ tal que $f(x) = y$. Por la definición de h tenemos que $h(x) = y$.
  2. $y \in B$. Como g es sobreyectiva, entonces existe $z \in \{1,\cdots,7\}$ tal que $g(z) = y$. Uno estaría tentado a decir que $h(z) = y$, pero esto no es cierto. Lo que si podemos decir es que $5 \leq z+4 \leq 11$ y por lo tanto por la definición de h tenemos que $h(z+4) = g(z)$ y en consecuencia $h(z+4) = y$. Es decir $z+4$ es la preimagen de y.

  Hemos mostrado en cada uno de los casos que y tiene preimagen. Por lo tanto h es sobreyectiva.

□

Podemos generalizar el resultado anterior para la unión de tres o más conjuntos disjuntos de la manera siguiente.

Teorema 5.5. *Sean A, B y C tres conjuntos finitos tales que $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$, entonces $A \cup B \cup C$ es finito y además*

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|.$$

Demostración: Sean A, B y C tres conjuntos como en la hipótesis. Considere el siguiente conjunto

$$D = A \cup B.$$

Tenemos entonces que D y C son disjuntos (¿por qué?). Luego por el teorema 5.3 concluimos que

$$|D \cup C| = |D| + |C|.$$

Análogamente, como A y B son disjuntos, tenemos que

$$|D| = |A \cup B| = |A| + |B|.$$

De la dos igualdades anteriores obtenemos

$$|A \cup B \cup C| = |D \cup C| = |D| + |C| = |A| + |B| + |C|.$$

□

Cuando una familia de conjuntos $\{A_i\}_i$ tiene la propiedad que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para cada par de índices distintos i, j se dice que la familia es **disjunta dos a dos**. El resultado anterior se puede generalizar: Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una familia de conjuntos finitos disjuntas dos a dos, entonces

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

La demostración de este hecho queda como ejercicio (ver ejercicio 8).

Otra propiedad de los conjuntos finitos es la siguiente:

Teorema 5.6. *Sea A un conjunto finito y $B \subseteq A$, entonces B es finito y además $|B| \leq |A|$.*

□

En otras palabras, si A tiene n elementos y $B \subseteq A$, entonces B tiene a lo sumo n elementos. El lector que quiera ver una prueba formal de este resultado puede ver el ejercicio 9 donde encontrará algunas indicaciones de como hacerlo.

El siguiente resultado es similar al teorema 5.3 pero ahora también incluiremos el caso donde los conjuntos A y B no son necesariamente disjuntos.

Teorema 5.7. *Sean A y B conjuntos finitos, entonces se cumple que*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Demostración: Comencemos observando que

$$A \cup B = (A \setminus B) \ \cup \ (A \cap B) \ \cup \ (B \setminus A)$$

y además que

$$\begin{array}{rcl} (A \cap B) \cap (A \setminus B) & = & \emptyset \\ (A \cap B) \cap (B \setminus A) & = & \emptyset \\ (A \setminus B) \cap (B \setminus A) & = & \emptyset. \end{array}$$

Es decir, cada par de estos tres conjuntos son disjuntos. Ya que $A \cap B \subseteq A$, $A \setminus B \subseteq A$ y $B \setminus A \subseteq B$, entonces cada uno de ellos es finito (por el teorema 5.6). Podemos ahora usar el teorema 5.5 y concluir que

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|. \tag{5.1}$$

Observe que $A \setminus B$ y $B \cap A$ son disjuntos, es decir

$$(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

y además que

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B).$$

Ya que $A \setminus B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq A$, entonces ambos son conjuntos finitos (por el teorema 5.6). Por lo tanto por el teorema 5.3 tenemos que

$$|A| = |A \cap B| + |A \setminus B|. \tag{5.2}$$

Análogamente para el conjunto B tenemos que

$$|B| = |A \cap B| + |B \setminus A|. \tag{5.3}$$

Sumando las igualdades dadas en (5.2) y (5.3) obtenemos que

$$|A| + |B| = |A \cap B| + |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|.$$

Comparando con (5.1) obtenemos

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

y ésta es la ecuación buscada.

□

El resultado anterior se puede generalizar para tres o más conjuntos finitos. Este resultado se conoce como el **principio de inclusión y exclusión**.

Teorema 5.8. *(Principio de inclusión y exclusión) Sean A, B y C tres conjuntos finitos, entonces $A \cup B \cup C$ es finito y además se cumple que*

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

□

La utilidad de este resultado reside en que en general es más fácil contar el número de elementos de la intersección de conjuntos que el de la unión de conjuntos. En el ejercicio 10 el lector encontrará algunas indicaciones de como demostrar este resultado.

Ejemplos 5.9. ¿Cuántos enteros del conjunto $S = \{1, 2, 3, \cdots, 1000\}$ son divisibles por 3 o 5? Definimos dos conjuntos D_3 y D_5 de la siguiente manera

$$D_3 = \{n \in S : \ n \text{ es divisible por } 3\} \ \text{ y } \ D_5 = \{n \in S : \ n \text{ es divisible por } 5\}.$$

Estamos buscando el número de elementos de $D_3 \cup D_5$. Haciendo uso del teorema 5.7 bastaría que consiguiéramos $|D_3|$, $|D_5|$ y $|D_3 \cap D_5|$. Notemos que n es divisible por 3 si n es de la forma $3k$ para algún entero k. Como $3 \cdot 333 = 999$, $3 \cdot 334 = 1002$, y $5 \cdot 200 = 1000$ podemos concluir que

$$D_3 = \{3k : 1 \leq k \leq 333\} \ \text{ y } \ D_5 = \{5k : 1 \leq k \leq 200\}.$$

Esto nos dice que $|D_3| = 333$ y $|D_5| = 200$. Por otra parte, observemos que si $n \in D_3 \cap D_5$, entonces n es divisible por 15 (pues la factorización de n en factores primos incluirá tanto al 3 como al 5). Recíprocamente, si n es divisible por 15 entonces n es divisible por 3 y por 5. Esto nos dice que

$$D_3 \cap D_5 = \{n \in S : \ n \text{ es divisible por } 15\}.$$

Por lo tanto, como $15 \cdot 66 = 990$ y $15 \cdot 67 = 1005$, entonces

$$D_3 \cap D_5 = \{15k : 1 \leq k \leq 66\}.$$

De esto tenemos que $|D_3 \cap D_5| = 66$. Finalmente

$$|D_3 \cup D_5| = |D_3| + |D_5| - |D_3 \cap D_5| = 333 + 200 - 66 = 467.$$

Veamos otro ejemplo. ¿Cuántos enteros en S son divisibles por 3, 5 o 7? Sea D_7 el conjunto

$$D_7 = \{n \in S : \ n \text{ es divisible por } 7\}.$$

Al igual que antes se tiene que $|D_7| = 142$, pues $7 \cdot 142 = 994$ y $7 \cdot 143 = 1001$. Por otra parte, como 7, 3 y 5 son números primos, entonces

$$\begin{array}{rcl} D_3 \cap D_7 & = & \{n \in S : \ n \text{ es divisible por } 21\} \\ D_5 \cap D_7 & = & \{n \in S : \ n \text{ es divisible por } 35\} \\ D_3 \cap D_5 \cap D_7 & = & \{n \in S : \ n \text{ es divisible por } 105\}. \end{array}$$

Razonando análogamente a como hiciéramos antes, obtenemos que $|D_3 \cap D_7| = 47$, $|D_5 \cap D_7| = 28$ y $|D_3 \cap D_5 \cap D_7| = 9$. Por el principio de inclusión y exclusión tenemos que

$$\begin{array}{rcl} |D_3 \cup D_5 \cup D_7| & = & |D_3| + |D_5| + |D_7| - |D_3 \cap D_5| - |D_3 \cap D_7| - \\ & & |D_5 \cap D_7| + |D_3 \cap D_5 \cap D_7| \\ & = & 333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 \\ & = & 543. \end{array}$$

$\square$

Observación 5.10. El principio de inclusión y exclusión se puede generalizar a un número arbitrario de conjuntos. Por ejemplo, para cuatro conjuntos A, B, C y D se tiene que

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C \cup D| &= |A| + |B| + |C| + |D| \\
&\quad -|A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |C \cap D| \\
&\quad +|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \\
&\quad -|A \cap B \cap C \cap D|.
\end{aligned}$$

□

Si entre dos conjuntos A y B se puede definir una función biyectiva, entonces A y B tienen el mismo número de elementos, como lo demostraremos a continuación. Este resultado es la clave de muchos métodos de conteo.

Teorema 5.11. *Sea A un conjunto finito y supongamos que existe un función biyectiva $f : A \to B$, entonces B es finito y además $|A| = |B|$.*

Demostración: Sea n el número de elementos de A, es decir, $|A| = n$ y sea $g : \{1, 2, \cdots, n\} \to A$ una biyección. Queremos encontrar una biyección $h : \{1, 2, \cdots, n\} \to B$. La función compuesta $f \circ g : \{1, 2, \cdots, n\} \to B$ es la candidata natural para h. En efecto, ya hemos visto que la composición de funciones biyectivas es biyectiva, así que $f \circ g$ es la biyección buscada. □

Ejemplo 5.12. Consideremos el conjunto $A = \{2, 5, 7, 8\}$ y el conjunto B dado por $\{a\} \times \{2, 5, 7, 8\}$. Es fácil ver que B tiene 4 elementos (¿cuáles son?). Podemos también definir una biyección $f : A \to B$ entre A y B de la siguiente manera

$$f(x) = (a, x).$$

Es decir, a cada elemento x de A lo enviamos al par ordenado (a, x).

Para ilustrar lo que hicimos en la demostración del teorema 5.11 busquemos una biyección $g : \{1, 2, 3, 4\} \to \{2, 5, 7, 8\}$. Por ejemplo: $g(1) = 2$, $g(2) = 5$, $g(3) = 7$ y $g(4) = 8$. Ahora podemos calcular la función compuesta $f \circ g : \{1, 2, 3, 4\} \to \{a\} \times \{2, 5, 7, 8\}$ y obtenemos $(f \circ g)(1) = (a, 2)$, $(f \circ g)(2) = (a, 5)$, $(f \circ g)(3) = (a, 7)$ y $(f \circ g)(4) = (a, 8)$. La función $f \circ g$ es biyectiva.

□

Observación 5.13. *Si A y B tienen n elementos cada uno, ¿Cúantas biyecciones existen entre A y B? La respuesta es que existen $n!$ funciones biyectivas entre A y B [1]. El lector interesado puede hacer la demostración de esta afirmación por inducción en n.*

[1] Recordemos que el factorial de un número natural se define por $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Por ejemplo, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

5.1.1. Cardinalidad del conjunto potencia

Ahora calcularemos el número de elemento del conjunto potencia. Para hacerlo usaremos el Principio de inducción, el paso inductivo está basado en la siguiente idea. Consideremos el conjunto potencia de $\{1,2,3\}$. Clasificamos los subconjuntos de $\{1,2,3\}$ en dos grupos: el primero consiste de aquellos que no contienen al 3 y el segundo del resto, es decir, aquellos que sí contienen al 3

$$\begin{array}{cccc} \emptyset & \{1\} & \{2\} & \{1,2\} \\ \\ \{3\} & \{1,3\} & \{2,3\} & \{1,2,3\} \end{array}$$

Notemos que los conjuntos que están en la primera fila son precisamente los subconjuntos de $\{1,2\}$, es decir, en el primer grupo hemos puestos todos los elementos de $\mathcal{P}(\{1,2\})$. Y los que colocamos en el segundo grupo se obtienen agregando el 3 a los conjuntos del primer grupo.

De lo dicho anteriormente se concluye que el número de elementos de $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ es el doble que el de $\mathcal{P}(\{1,2\})$. El lector debe tener presente esta idea cuando lea la prueba que damos a continuación.

Teorema 5.14. *Sea n un natural con $n \geq 1$, entonces $\mathcal{P}(\{1,2,\cdots,n\})$ tiene 2^n elementos.*

Demostración: La demostración la haremos por inducción. Para n igual a 1, tenemos que $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset,\{1\}\}$ tiene 2^1 elementos. Supongamos que el resultado es cierto para k y mostrémoslo para $k+1$. La hipótesis inductiva dice que $\mathcal{P}(\{1,2,3\cdots,k\})$ tiene 2^k elementos. Consideremos los siguientes conjuntos

$$A = \{X \in \mathcal{P}(\{1,2,3\cdots,k+1\}) : \; k+1 \in X\}$$

$$B = \{X \in \mathcal{P}(\{1,2,3\cdots,k+1\}) : \; k+1 \not\in X\}.$$

Observemos que B es igual a $\mathcal{P}(\{1,2,3\cdots,k\})$ (verifíquelo!). Tenemos que $A\cap B = \emptyset$ y además que $\mathcal{P}(\{1,2,3\cdots,k+1\}) = A\cup B$ (verifíquelo!). La hipótesis inductiva nos dice que B tiene 2^k elementos. Mostraremos en seguida que A también tiene 2^k elementos. Supongamos esto por un momento y terminemos la verificación del paso inductivo. Como $A\cup B$ es igual a $\mathcal{P}(\{1,2,3\cdots,k+1\})$ y A y B son disjuntos, entonces podemos usar el teorema 5.3 y concluir que $\mathcal{P}(\{1,2,3\cdots,k+1\})$ tiene 2^k+2^k elementos. Como $2\cdot 2^k = 2^{k+1}$, hemos mostrado que $\mathcal{P}(\{1,2,3\cdots,k+1\})$ tiene 2^{k+1} elementos. Con esto terminamos la verificación del paso inductivo.

Nos quedó pendiente mostrar que A tiene 2^k elementos. En realidad es bastante sencillo darse cuenta de ésto. Analizando con cuidado la definición de A vemos que A tiene tantos elementos como B, pues a cada conjunto X en B le corresponde exactamente uno de A, precisamente el conjunto $X\cup\{k+1\}$. Esta es la idea que presentamos antes de enunciar el teorema para el caso particular del conjunto potencia de $\{1,2,3\}$. Precisaremos estas ideas a continuación.

Considere la siguiente función: $f : B \to A$ dada por

$$f(X) = X\cup\{k+1\}.$$

Observe que $f(X)$ es un subconjunto de $\{1, 2, 3 \cdots, k+1\}$. Veamos que f es inyectiva. Sean $X, Y \in B$ con $X \neq Y$. Entonces al agregarles a estos conjuntos el número $k+1$ siguen siendo distintos, en otras palabras, $X \cup \{k+1\} \neq Y \cup \{k+1\}$. Esto muestra que $f(X) \neq f(Y)$ y por lo tanto que f es inyectiva. Dejamos como ejercicio al lector la verificación que f es sobreyectiva (ver ejercicio 15).

□

El lector seguramente ya habrá notado lo larga que resultó ser la prueba del teorema anterior (y eso que hasta le dejé una parte al lector!). También habrá observado que la idea "detrás" de la prueba es realmente simple (como lo ilustramos antes de enunciar el teorema). Esto es común que suceda en matemáticas. Algunas demostraciones usan una idea sencilla que al "formalizarla" en el lenguaje de las matemáticas resulta aparentemente mucho más complicada. Sin embargo, la formalización y la prueba son fundamentales para convencernos que el resultado enunciado era correcto. A medida que avance en el estudio de la matemática, el lector irá notando la aparición en los libros de frases como "es fácil ver que usando tal o cual idea se puede completar la demostración" y le dejan al lector la tarea de convencerse que en realidad esa "idea" simple es suficiente. Podríamos decir que una parte importante del estudio de las matemáticas consiste en llegar a ese convencimiento.

Ya vimos que $\mathcal{P}(\{1, 2, 3 \cdots, n\})$ tiene 2^n elementos. ¿Qué podemos decir acerca de $\mathcal{P}(A)$ si A tiene n elementos? El siguiente teorema dice que $\mathcal{P}(A)$, por supuesto, tiene 2^n elementos.

Teorema 5.15. *Sea A un conjunto finito con n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.*

Demostración: Definiremos una biyección entre $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{P}(\{1, 2, \cdots, n\})$. Después de tener a la mano esa biyección podremos usar el teorema 5.11, pues ya sabemos que $\mathcal{P}(\{1, 2, \cdots, n\})$ tiene 2^n elementos y así concluir que $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

Si A es el conjunto vacío, entonces $\mathcal{P}(\emptyset)$ tiene un solo elemento, es decir tiene 2^0 elementos. Podemos entonces suponer que $|A| \geq 1$. Sea A un conjunto con n elementos y fijemos un biyección $f : \{1, 2, 3 \cdots, n\} \to A$. Definiremos una función $g : \mathcal{P}(\{1, 2, \cdots, n\}) \to \mathcal{P}(A)$ de la manera siguiente. Dado un subconjunto $B \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ definimos $g(B)$ como el conjunto

$$g(B) = \{f(b) : \ b \in B\}.$$

Es decir, $g(B)$ consiste de las imágenes bajo f de los elementos de B. Dejamos al lector la tarea de convencerse que g es en efecto una biyección (ver ejercicio 17).

□

5.1.2. Cardinalidad del producto Cartesiano

Ahora calcularemos la cardinalidad del producto cartesiano de dos conjuntos.

Teorema 5.16. *Sean A y B dos conjuntos finitos, entonces el producto cartesiano $A \times B$ es finito y se cumple que*

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Demostración: Para cada $x \in A$ definimos el conjunto D_x como

$$D_x = \{x\} \times B.$$

Usando el teorema 5.11 tenemos que $|D_x| = |B|$ (¿Cuál es la biyección f que hace falta para poder usar el teorema 5.11?). Hemos definido entonces una familia indizada de conjuntos $\{D_x : \ x \in A\}$ donde el conjunto de índices es el conjunto A. Observemos que si $x, x' \in A$ son distintos, entonces D_x y $D_{x'}$ son disjuntos (¿por qué?). Dejamos al lector la tarea de verificar que

$$A \times B = \bigcup_{x \in A} D_x.$$

Por lo tanto podemos hacer uso de la versión generalizada del teorema 5.5 (ver el comentario que sigue a 5.5 y el ejercicio 8) y concluir que

$$|A \times B| = \sum_{x \in A} |D_x|.$$

Para facilitar la lectura, sea n el número de elementos de A y m el número de elementos de B. En símbolos, $n = |A|$ y $m = |B|$. Ya vimos que cada D_x tiene m elementos, así que en la suma anterior tenemos m repetido tantas veces como elementos tenga A, es decir, tenemos m repetido n veces. En otras palabras,

$$|A \times B| = n \cdot m$$

y esto era lo que queríamos demostrar.

□

Ejemplo 5.17. Considere el conjunto

$$S = \{100, 101, 102, \cdots, 999\}.$$

Observemos que $|S| = 900$. ¿Cuántos números en S tienen un 3 en la primera cifra? Reflexionando un poco vemos que existe 100 de esos números. Podemos también responder esta pregunta usando el teorema 5.16. Los números que estamos buscando tienen la forma $3ab$, donde a, b son dígitos entre 0 y 9 (ambos incluidos). Por el teorema 5.16 sabemos que existen 10^2 pares ordenados de la forma (a, b) con $a, b \in \{0, 1, \cdots, 9\}$. Cada par (a, b) nos proporciona uno de los números buscados, precisamente el número $3ab$. Y recíprocamente, a cada número de la forma $3ab$ le corresponde el par (a, b). Esto muestra que la función $(a, b) \mapsto 3ab$ es una biyección entre $\{0, 1, \cdots, 9\} \times \{0, 1, \cdots, 9\}$ y el conjunto al que le estamos determinando la cardinalidad. Usando el teorema 5.11 concluimos que existen 100 números de la forma $3ab$.

□

Ejercicios 5.1

1. Determine si los siguientes conjuntos son finitos y en caso de serlo diga cuantos elementos tiene.

a) $\{n \in \mathbb{N} :$ La suma de las cifras de n es igual a $5\}$

b) $\{n \in \mathbb{N} : \ 4 + \frac{1}{n} > \sqrt{17}\}$

c) $\{n \in \mathbb{N} : \ \frac{3n+1}{4n+2} < \frac{29}{40}\}$

2. En un grupo de 150 personas, 45 nadan, 40 montan bicicleta y 50 trotan. Además, 32 personas trotan pero no andan en bicicleta, 27 personas trotan y nadan y 10 personas practican los tres deportes.

   a) ¿Cuántas personas solamente trotan (es decir, trotan pero ni nadan ni andan en bicicleta)?

   b) Si 21 personas andan en bicicleta y nadan ¿Cuántas no realizan ninguna de las tres actividades?

   (*Sugerencia:* Haga un diagrama de Venn).

3. De 200 personas, 150 trotan o nadan (pudieran hacer las dos cosas). Si 85 nadan y 60 hacen las dos actividades ¿cuántas trotan?

4. Una bolsa contiene 50 metras de cuatro colores distintos. Explique por qué debe haber al menos 13 metras del mismo color.

5. Suponga que se colocan 73 metras en ocho cajas.

   a) Muestre que una caja debe contener al menos 10 metras.

   b) Muestre que si dos de las cajas están vacías, entonces alguna caja contiene al menos 13 metras.

6. Encuentre el número de enteros en $\{1, 2, \cdots, 1000\}$ que sean divisibles por 4, 5 ó 7. (*Sugerencia:* Vea el ejemplo 5.9).

7. Sean A y B dos conjuntos disjuntos tales que A tiene n elementos y B tiene m elementos. Sean $f : \{1, 2, 3, \cdots, n\} \to A$ y $g : \{1, 2, 3, \cdots, m\} \to B$ funciones biyectivas. Defina $h : \{1, 2, \cdots, n+m\} \to (A \cup B)$ de la manera siguiente:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{si } 1 \leq x \leq n \\ g(x-n) & , \text{si } n+1 \leq x \leq n+m. \end{cases}$$

   Muestre que h es una biyección.

   (*Sugerencia:* Imite lo hecho en la demostración del teorema 5.3).

8. Sea $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ una familia de conjuntos finitos disjuntas dos a dos. Demuestre que

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

   (*Sugerencia*: Use inducción en n y siga un razonamiento similar al usado en la demostración del teorema 5.5).

9. Muestre que si A es finito y $B \subseteq A$, entonces B es finito y además se cumple que $|B| \leq |A|$.

   (*Sugerencia:* Sea n el número de elementos de A. Haga la prueba por inducción en n. Si n es cero, entonces A es vacío y por lo tanto $B = \emptyset$. Para el paso inductivo, sea A un conjunto con $n+1$ elementos y $f : \{1, 2, \cdots, n+1\} \to A$ una biyección. Considere dos casos: (a) $f(n+1) \notin B$ y (b) $f(n+1) \in B$. Para el caso (a), verifique que $A - \{f(n+1)\}$ tiene n elementos y que $B \subseteq A - \{f(n+1)\}$. Use la hipótesis inductiva para concluir que B es finito y que $|B| \leq n$. Para el caso (b), considere el conjunto $C = B - \{f(n+1)\}$. Verifique que $C \subseteq A - \{f(n+1)\}$ y por el caso (a) concluya que C es finito y además que $|C| \leq n$. Para finalizar, verifique que $B = C \cup \{f(n+1)\}$ y use el teorema 5.3 para concluir que $|B| = |C| + 1$.)

10. Demuestre el teorema 5.8.

    (*Sugerencia:* Observe que $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$. Use ahora el teorema 5.1 y exprese $|A \cup B \cup C|$ en términos de $|A \cup B|$, $|(A \cup B) \cap C|$ y $|C|$. Use de nuevo el teorema 5.1 para calcular $|A \cup B|$ y $|(A \cap C) \cup (B \cap C)|$).

11. *a*) Demuestre la fórmula dada en la observación 5.10.

    b) Halle una fórmula para calcular

    $$|A \cup B \cup C \cup D \cup E|.$$

12. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. Determine

$\lvert A \cup B\rvert$	$\lvert A \cap B\rvert$	$\lvert A \triangle B\rvert$	$\lvert \mathcal{P}(A)\rvert$	$\lvert A \times B\rvert$
$\lvert \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)\rvert$	$\lvert \mathcal{P}(A \times B)\rvert$	$\lvert \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))\rvert$	$\lvert \mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(B))\rvert$	$\lvert A \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(B))\rvert$

13. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$ y $C = \{1, 3, 5\}$. Calcule $|A \times B \times C|$.

14. Considere los siguientes conjuntos

    $$A = \{X \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3 \cdots, k+1\}) : \ k+1 \in X\}$$

    y

    $$B = \{X \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3 \cdots, k+1\}) : \ k+1 \notin X\}.$$

    Verifique las siguientes afirmaciones:

    a) B es igual a $\mathcal{P}(\{1, 2, 3 \cdots, k\})$

    b) $A \cap B = \emptyset$

    c) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3 \cdots, k+1\}) = A \cup B$.

15. Complete la demostración del teorema 5.14.

    (*Sugerencia:* Para ver que f es sobreyectiva, dado $X \in A$, es decir, $X \subseteq \{1, 2, 3 \cdots, k+1\}$ y además $k+1 \in X$. Considere $Y = X \setminus \{k+1\}$ y verifique que $Y \in B$. Muestre que $f(Y) = X$).

16. Sean A, B y C tres conjuntos finitos con $|A| = n$, $|B| = m$ y $|C| = p$. Muestre que $|A \times B \times C| = n \cdot m \cdot p$.

    (*Sugerencia:* Halle una biyección entre $A \times B \times C$ y $(A \times B) \times C$. Y use el teorema 5.16).

17. Concluya la desmotración del teorema 5.15.

    (*Sugerencia:* Usando que f es inyectiva, muestre que si $B, B' \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ con $B \neq B'$, entonces $g(B) \neq g(B')$. Para ver que g es sobreyectiva, considere un subconjunto C de A cualquiera. Verifique que el conjunto B definido por $\{a \in \{1, 2, \cdots, n\} : f(a) \in C\}$ satisface que $g(B) = C$ (para probarlo hará falta usar que f es sobreyectiva).

5.2. Conjuntos equipotentes

Sean A y B dos conjuntos. Supongamos que existe una función $f : A \to B$ biyectiva. Si A y B son finitos, ya vimos en la sección anterior que la existencia de esa función f es suficiente para garantizar que A y B tienen el mismo número de elementos. Esta es la idea fundamental para decir que dos conjuntos cualesquiera tienen el mismo tamaño.

Definición 5.18. *Dos conjuntos A y B se dicen que son* ***equipotentes*** *si existe una función biyectiva $f : A \to B$. En este caso escribiremos $A \approx B$.*

Cuando dos conjuntos A y B no sean equipotentes escribiremos $A \not\approx B$. Antes de dar algunos ejemplos mostraremos que la relación $\approx$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

Teorema 5.19. *Sean A, B, C conjuntos. Entonces*
(i) $A \approx A$.
(ii) Si $A \approx B$, entonces $B \approx A$.
(iii) Si $A \approx B$ y $B \approx C$, entonces $A \approx C$.

Demostración:

(i) La función identidad $1_A : A \to A$ es una biyección.

(ii) Supongamos que $A \approx B$ y sea $f : A \to B$ una biyección. Entonces f tiene inversa y $f^{-1} : B \to A$ también es una biyección. Lo que muestra que $B \approx A$.

(iii) Supongamos que $A \approx B$ y $B \approx C$ y sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ biyecciones. Como la composición de funciones biyectivas es biyectiva entonces la función $g \circ f : A \to C$ es una biyección. Por lo tanto $A \approx C$.

□

Notemos que la definición que diéramos de conjunto finito (ver 5.1) podemos también expresarla de la siguiente manera:

Un conjunto A tiene n elementos ($n \geq 1$) si A es equipotente con $\{1, 2, \cdots, n\}$.

Ejemplo 5.20. Considere los siguientes conjuntos

$$P = \{2n : n \in \mathbb{N}\} \quad I = \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}.$$

P consiste de todos los números naturales pares e I de los naturales impares. Considere la función

$$f : \mathbb{N} \to P$$

definida por

$$f(n) = 2n.$$

Dejamos al lector la fácil tarea de verificar que f es biyectiva. Esto muestra que $\mathbb{N} \approx P$.

De manera similar para el conjunto I considere la función $g : \mathbb{N} \to I$ dada por $g(n) = 2n+1$. Al igual que antes, es fácil verificar que g es una biyección y por lo tanto $\mathbb{N} \approx I$. Como $\approx$ es simétrica y transitiva podemos además concluir que $P \approx I$.

□

Ejemplo 5.21. Considere la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{, si } n \text{ es par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{, si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Dejamos como un ejercicio al lector la verificación que f es una biyección (ver ejercicio 1). Por lo tanto

$$\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}.$$

□

Ejemplo 5.22. Considere la función $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{x-2}$$

Dejamos como ejercicio mostrar que f es una biyección. Tenemos entonces que

$$\mathbb{R} \setminus \{2\} \approx \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

□

Ejemplo 5.23. Considere la siguiente función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{, si } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{, si } 1 \le x. \end{cases}$$

Dejamos como ejercicio al lector mostrar que f es biyectiva. Tenemos entonces que

$$(0, +\infty) \approx \mathbb{R}.$$

□

El siguiente resultado será usado con bastante frecuencia.

Proposición 5.24. *Sea $f : A \to B$ una función inyectiva. Entonces $A \approx rango(f)$.*

Demostración: Restringiendo el contradominio de f y dejando la misma ley de correspondencia obtenemos la función $g : A \to rango(f)$ dada por $g(x) = f(x)$. Entonces g es biyectiva. $\square$

Ejemplo 5.25. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por partes de la manera siguiente

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{, si } x \notin \mathbb{N} \\ x+1 & \text{, si } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dejamos como ejercicio verificar que f es inyectiva y además que rango$(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (ver ejercicio 7). Usando la proposición 5.24 concluimos que

$$\mathbb{R} \approx \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$\square$

Ejemplo 5.26. Considere la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

dada por

$$f(x) = 3x + 1.$$

Como el lector seguramente sabe, la gráfica de f es una recta. Es fácil verificar que f es inyectiva. Usaremos esta función para construir varios ejemplos de conjuntos equipotentes.

1. Mostraremos que $\mathbb{R} \setminus \{3\} \approx \mathbb{R} \setminus \{10\}$. En efecto, sea $g : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 3x+1$. Como f es inyectiva, entonces g también lo es. Notemos que rango$(g) = \mathbb{R}\setminus\{10\}$, pues $f(3) = 10$. Luego por la proposición 5.24 concluimos que $\mathbb{R} \setminus \{3\} \approx \mathbb{R} \setminus \{10\}$.

2. Un argumento completamente análogo muestra que para todo $r \in \mathbb{R}$ se tiene que

   $$\mathbb{R} \setminus \{r\} \approx \mathbb{R} \setminus \{f(r)\}$$

   Usando una recta diferente se puede mostrar que $\mathbb{R} \setminus \{a\} \approx \mathbb{R} \setminus \{b\}$ para todo par de reales a, b (ver ejercicio 2)

3. Mostraremos que $(-1, 3) \approx (-2, 10)$. En efecto, consideremos la función $h : (-1, 3) \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 3x+1$. Como en la parte (1) tenemos que h es inyectiva. Dejamos como ejercicio verificar que rango$(h) = (-2, 10)$. Por la proposición 5.24 concluimos que $(-1, 3) \approx (-2, 10)$.

   Un argumento completamente análogo muestra que $[-1, 3] \approx [-2, 10]$.

4. Mostraremos que $(-\infty,3)\approx(-\infty,10)$. En efecto, consideremos la función $j:(-\infty,3)\to\mathbb{R}$ definida por $j(x)=3x+1$. Como f es inyectiva, entonces j también lo es. Dejamos como ejercicio verificar que rango$(j)=(-\infty,10)$. Por la proposición 5.24 concluimos que $(-\infty,3)\approx(-\infty,10)$.

□

El siguiente resultado es importante.

Teorema 5.27. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\approx\mathbb{N}$.

Demostración: Definimos $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ de la siguiente manera

$$f((a,b))=2^a(2b+1)-1.$$

Mostraremos que f es una biyección. Sea $n\in\mathbb{N}$ y a el mayor natural tal que 2^a divide a $n+1$ (a puede ser cero). Por lo tanto $\frac{n+1}{2^a}$ es impar, y en consecuencia existe un natural b tal que $\frac{n+1}{2^a}=2b+1$. Tenemos que

$$n+1=2^a(2b+1)$$

y en consecuencia $f((a,b))=n$. Esto muestra que f es sobreyectiva.

Para ver que f es inyectiva, supongamos que $a,a',b,b'\in\mathbb{N}$ y

$$2^a(2b+1)=2^{a'}(2b'+1).$$

Como $2b+1$ y $2b'+1$ son impares, entonces necesariamente 2^a divide a $2^{a'}$ y viceversa. Por lo tanto $2^a=2^{a'}$, de esto se concluye que $a=a'$ y además que $2b+1=2b'+1$. Por lo tanto, $b=b'$.

□

Existen otras pruebas del resultado anterior. Mostraremos a continuación otra que es fácil de visualizar. Comenzaremos representado los elementos de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de la siguiente forma cuadrangular:

$$\begin{array}{ccccc}
(1,1), & (1,2), & \cdots, & (1,s), & \cdots\\
(2,1), & (2,2), & \cdots, & (2,s), & \cdots\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
(s,1), & (s,2), & \cdots, & (s,s), & \cdots\\
\vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Considere ahora el siguiente arreglo (que sigue las diagonales del anterior).

$$\begin{array}{c}
(1,1)\\
(2,1),(1,2)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(s,1),(s-1,2),\cdots,(1,s)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Este arreglo sugiere una manera de ordenar los elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Siguiendo lo indicado en el diagrama podemos "contar" $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. El orden del conteo sería

$$(1,1),(2,1),(1,2),(3,1),(2,2),(1,3)\cdots$$

Es decir, considere la función g que asigna a $(1,1)$ el número 1; a $(2,1)$ y $(1,2)$ los números 2 y 3 respectivamente; a $(3,1)$, $(2,2)$ y $(1,3)$ los números 4, 5 y 6 respectivamente, etc.

La biyección que corresponde a esta manera de contar $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ viene dada por la siguiente fórmula:

$$g(a,b) = \frac{(a+b-1)(a+b-2)}{2} + b.$$

Dejamos al lector interesado la tarea de mostrar que g es una biyección.

Ejercicios 5.2

1. Considere la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{, si } n \text{ es par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{, si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

   Muestre que f es una biyección.

2. Sean $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ con $a \neq b$ y $c \neq d$. Considere la función

$$f(x) = \frac{c-d}{a-b}(x-b) + d.$$

   Muestre que f es biyectiva, $f(a) = c$ y $f(b) = d$. Use esta función para responder las siguientes preguntas. Escoja adecuadamente los valores de a, b, c y d e imite lo hecho en el ejemplo 5.26.

   a) Muestre que $\mathbb{R} \setminus \{2\} \approx \mathbb{R} \setminus \{5\}$.

   b) Muestre que $\mathbb{R} \setminus \{2,1\} \approx \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$.

   c) Muestre que $\mathbb{Q} \setminus \{2,1\} \approx \mathbb{Q} \setminus \{1,-1\}$.

   d) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ muestre que $\mathbb{R} \setminus \{a\} \approx \mathbb{R} \setminus \{b\}$.

   e) Sean $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ con $a \neq b$ y $c \neq d$. Muestre que $\mathbb{R} \setminus \{a,b\} \approx \mathbb{R} \setminus \{c,d\}$

3. Considere la función $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{, si } 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{, si } 1 \leq x. \end{cases}$$

   Muestre que f es biyectiva.

4. *a*) Muestre que $(-1,1) \approx (3,5)$ y $[-1,1] \approx [3,5]$. (*Sugerencia:* Use la función dada en el ejercicio 2).

   b) Muestre que $(-1,6] \approx (2,8]$.

c) Muestre que $[-1,6) \approx (2,8]$.

d) Muestre que, en general, dados $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $c < d$ se tiene que $(a,b) \approx (c,d)$ y $[a,b] \approx [c,d]$. ¿Cuáles otras variantes de esta pregunta se le ocurre son válidas?

5. a) Muestre que $(1,+\infty) \approx (0,+\infty)$.(*Sugerencia:* Considere la función $f(x) = x-1$).

   b) Muestre que $(1,+\infty) \approx (-\infty,0)$.

   c) Muestre que $(-\infty,6] \approx (-\infty,10]$.

   d) Muestre que $(-\infty,6] \approx [10,+\infty)$.

   e) Muestre que $\mathbb{R} \approx (-\infty,0)$.

   f) Muestre que, en general, para cada $a,b \in \mathbb{R}$ se tiene que $(a,+\infty) \approx (b,+\infty)$. ¿Cuáles otras variantes se le ocurre son válidas?

6. a) Muestre que $(0,+\infty) \approx (0,1)$. (*Sugerencia:* Considere la función $f(x) = \frac{1}{x} - 1$).

   b) Muestre que $(4,+\infty) \approx (0,1)$.

   c) Muestre que $(4,+\infty) \approx (3,5)$.

7. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por partes de la manera siguiente

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{si } x \notin \mathbb{N} \\ x+1 & , \text{si } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

   Muestre que f es inyectiva y que $\text{rango}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

8. Use la idea del ejemplo 5.25 para mostrar lo siguiente

   a) $\mathbb{R} \setminus \{0\} \approx \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

   b) $\mathbb{R} \setminus \{0,1\} \approx \mathbb{R} \setminus \{0,1,2\}$

   c) $\mathbb{R} \setminus \{-1\} \approx \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

   d) $\mathbb{R} \setminus \{0,1,3\} \approx \mathbb{R} \setminus \{5,2\}$

   e) $\mathbb{Q} \setminus \{0,1\} \approx \mathbb{Q} \setminus \{0,1,2\}$

9. Muestre que $(-1,1) \approx \mathbb{R}$.

   (*Sugerencia:* Muestre que la función $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ es biyectiva).

5.3. Conjuntos infinitos

Un conjunto que no sea finito se dice que es **infinito**. Una gran parte de las matemáticas está ligada al concepto de conjunto infinito (alguien alguna vez comparó la matemática con una sinfonía del infinito). Una de las propiedades más importantes de un conjunto infinito es la de poseer un subconjunto propio equipotente a él. Esto ya lo hemos observado en algunos ejemplos, pues vimos que

$$\mathbb{Z} \approx \mathbb{N} \quad \mathbb{R} \approx (0, +\infty) \quad \mathbb{R} \approx (\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

En esta sección estudiaremos algunas de la propiedades de los conjuntos infinitos. Lo primero que mostraremos acerca de los conjuntos infinitos es que $\mathbb{N}$ es uno de ellos.

Teorema 5.28. *(i) Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ finito, entonces $(\mathbb{N} \setminus A) \approx \mathbb{N}$.*

(ii) $\mathbb{N}$ es infinito.

Demostración:

(i) La haremos por inducción en el número de elementos de A. Si A es vacío el resultado es obvio. Supongamos que A tiene un elemento, es decir, $A = \{m\}$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Definimos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{m\}$ de la siguiente manera:

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{, si } n < m \\ n+1 & \text{, si } m \leq n. \end{cases}$$

Dejamos al lector mostrar que f es inyectiva. Veamos que f es sobreyectiva. Sea $k \in \mathbb{N} \setminus \{m\}$, entonces, hay dos casos a considerar: (1) Si $k < m$, entonces $f(k) = k$. (2) Si $m < k$ (recuerde que k no puede ser igual a m), entonces $m \leq k - 1$ y por lo tanto $f(k-1) = k$.

Para el paso inductivo, supongamos que para todo subconjunto $B \subseteq \mathbb{N}$ con n elementos se cumple que $\mathbb{N} \approx (\mathbb{N} \setminus B)$. Sea ahora $A \subseteq \mathbb{N}$ un subconjunto con $n+1$ elementos. Escojamos uno de ellos arbitrariamente, denotémoslo por a. Sea $B = A \setminus \{a\}$, entonces B tiene n elementos. Por consiguiente $\mathbb{N} \approx (\mathbb{N} \setminus B)$. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus B$ una biyección. Como $a \in \mathbb{N} \setminus B$ y f es biyectiva, entonces existe un único $k \in \mathbb{N}$ tal que $f(k) = a$. Sea $g : \mathbb{N} \setminus \{k\} \to \mathbb{N} \setminus A$ la función definida por $g(x) = f(x)$. Entonces g es una biyeción (¿por qué?) y por lo tanto $(\mathbb{N} \setminus \{k\}) \approx (\mathbb{N} \setminus A)$. Por el primer caso, tenemos que $(\mathbb{N} \setminus \{k\}) \approx \mathbb{N}$, luego por la transitividad de $\approx$ concluimos que $(\mathbb{N} \setminus A) \approx \mathbb{N}$.

(ii) Se deduce inmediatamente de (i), pues si $f : \{1, 2, \cdots, n\} \to \mathbb{N}$ es una inyección, entonces $rango(f)$ es finito (pues $\{1, 2, \cdots, n\} \approx rango(f)$). Por consiguiente $(\mathbb{N} \setminus rango(f)) \approx \mathbb{N}$, en particular, $\mathbb{N} \setminus rango(f)$ no es vacío, es decir, f no es sobreyectiva.

□

El próximo resultado muestra que un conjunto finito no puede ser equipotente a un subconjunto propio, pero antes necesitamos mostrar lo siguiente:

Proposición 5.29. *Sea $n \geq 1$ un natural. Para cada natural m con $1 \leq m \leq n+1$ se tiene que $\{1, 2, \cdots, n\}$ es equipotente a $\{1, 2, \cdots, n+1\} \setminus \{m\}$.*

Demostración: Considere la siguiente función $f : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n+1\} \setminus \{m\}$ dada por

$$f(i) = \begin{cases} i & , \text{si } i < m \\ i+1 & , \text{si } i \geq m. \end{cases}$$

Dejamos al lector verificar que f es una biyección.

$\square$

Teorema 5.30. *Un conjunto finito no es equipotente a ninguno de sus subconjuntos propios.*

Demostración: Sea A un conjunto finito. Si A es vacío, entonces no hay nada que demostrar pues el único subconjunto de $\emptyset$ es $\emptyset$. Por esto podemos suponer que A no es vacío. Sea $n = |A|$ y $f : \{1, \cdots, n\} \to A$ una biyección y $B \subseteq A$ con $B \neq A$. Entonces $f^{-1}(B)$ es un subconjunto propio de $\{1, \cdots, n\}$. Le dejamos al lector convencerse que basta mostrar que B no es equipotente con $\{1, \cdots, n\}$. En otras palabras, basta demostrar lo siguiente:

Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Entonces $\{1, \cdots, n\}$ no es equipotente a ninguno de sus subconjuntos propios.

La prueba será por inducción en n.

(a) (Base de la inducción) Sea A un subconjunto propio de $\{1\}$. Entonces necesariamente $A = \emptyset$ y por consiguiente $A \not\approx \{1\}$.

(b) (Paso inductivo) Supongamos que se cumple para n y lo mostraremos para $n+1$. Sea A un subconjunto propio de $\{1, \cdots, n+1\}$. Daremos una argumento indirecto por reducción al absurdo. Supongamos que $f : A \to \{1, \cdots, n+1\}$ es una biyección. Hay dos casos posibles:

(1) Supongamos que $n+1 \notin A$. Como f es sobreyectiva existe $a \in A$ tal que $f(a) = n+1$. Considere la siguiente función $g : A \setminus \{a\} \to \{1, \cdots, n\}$ definida por

$$g(x) = f(x).$$

Observe que g está bien definida y es biyectiva. Como $n+1 \notin A$ y $a \leq n$ entonces $A \setminus \{a\}$ es un subconjunto propio de $\{1, \cdots, n\}$. Esto contradice la hipótesis inductiva.

(2) Supongamos que $n+1 \in A$. Sea $B = A \setminus \{n+1\}$. Entonces B es un subconjunto propio de $\{1, \cdots, n\}$. Definimos $g : B \to \{1, \cdots, n+1\} \setminus \{f(n+1)\}$ de la manera siguiente $g(x) = f(x)$. Dejamos como ejercicio al lector verificar que g es una biyección. Esto muestra que

$$B \approx \{1, \cdots, n+1\} \setminus \{f(n+1)\}.$$

La proposición 5.29 nos dice que

$$\{1, \cdots, n+1\} \setminus \{f(n+1)\} \approx \{1, \cdots, n\}.$$

Como $\approx$ es transitiva (ver 5.19 (iii)) entonces concluimos que

$$B \approx \{1, \cdots, n\}.$$

Por ser B un subconjunto propio de $\{1, \cdots, n\}$ entonces la hipótesis inductiva nos asegura que

$$B \not\approx \{1, \cdots, n\}.$$

Esto es una contradicción.

$\square$

El siguiente resultado nos dice que, desde el punto de vista del tamaño de los conjuntos, $\mathbb{N}$ es el conjunto infinito más pequeño. Además nos da un método para mostrar que un conjunto es infinito.

Teorema 5.31. *Un conjunto A es infinito si, y sólo si, existe una función inyectiva $f : \mathbb{N} \to A$.*

Demostración: Supongamos que A es infinito. Definiremos una función $f : \mathbb{N} \to A$ inyectiva. Para ese fin, mostraremos que es posible escoger, para cada $n \in \mathbb{N}$, un elemento $a_n \in A$ de tal manera que si $n \neq m$ son naturales, entonces $a_n \neq a_m$. Una vez hecho esto, definiremos $f(n) = a_n$ y tendremos la función inyectiva que buscábamos.

Como A es infinito, en particular A no es vacío, sea entonces $a_0 \in A$ cualquiera. Como $A = A - \{a_0\} \cup \{a_0\}$ y $\{a_0\}$ es finito, entonces $A - \{a_0\}$ no es finito y en particular no es vacío. Luego podemos escoger $a_1 \in A$ con $a_1 \neq a_0$. Supongamos que hemos escogido $a_k \in A$ para $k \leq n$ tal que $a_k \neq a_l$ si $k \neq l$ y $k, l \leq n$. Notemos que $A - \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ no es vacío, pues si lo fuera, entonces $A = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$, y en consecuencia A sería finito. Por esta razón sabemos que existe un elemento $a \in A$ diferente de $a_0, a_1, \cdots, a_n$, escojamos uno de ellos y denotémoslo por a_{n+1}. Por lo dicho al comienzo, la función $f : \mathbb{N} \to A$ dada por $f(n) = a_n$ es inyectiva.

Recíprocamente, supongamos que $f : \mathbb{N} \to A$ es una función inyectiva y sea $B = rango(f)$. Entonces por la proposición 5.24 se tiene que $\mathbb{N} \approx B$. Como $\mathbb{N}$ no es finito, entonces B no es finito. Como $B \subseteq A$, entonces A no es finito.

$\square$

Ejemplo 5.32. Por lo visto en la sección 5.2 sabemos que el intervalo $(0, 1)$ es infinito. Podemos mostrarlo de otra forma usando el teorema 5.31. En efecto, considere la función $f : \mathbb{N} \to (0, 1)$ dada por $f(n) = 1/n + 2$. El lector puede verificar fácilmente que f es inyectiva.

Un conjunto A se dice que es **infinito en el sentido de Dedekind** si existe $B \subseteq A$ tal que $A \approx B$. El siguiente teorema nos dice que este concepto es equivalente al de conjunto infinito.

Teorema 5.33. *Un conjunto A es infinito si, y sólo si, existe $B \subseteq A$ tal que $A \approx B$ y $B \neq A$.*

Demostración: $(\Rightarrow)$ Mostraremos la contrarecíproca. Supongamos que A es finito y que $B \subseteq A$ con $A \neq B$. Por el teorema 5.30 concluimos que $A \not\approx B$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que A es infinito. Por el teorema 5.31 sabemos que existe una función $f : \mathbb{N} \to A$ inyectiva. Sea $B = A - \{f(0)\}$. Mostraremos que $A \approx B$. Ya que f es inyectiva, entonces existe una función biyectiva $h : rango(f) \to \mathbb{N}$ tal que $(h \circ f)(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $(f \circ h)(a) = a$ para todo $a \in rango(f)$. Definimos $g : B \to A$ de la siguiente manera

$$g(b) = \begin{cases} f(h(b)-1) & \text{, si } b \in B \cap rango(f) \\ b & \text{, si } b \in B - rango(f). \end{cases}$$

Observe que $h(b) = 0$ si, y sólo si, $b = f(0)$. Luego para todo $b \in B \cap rango(f)$ se cumple que $h(b) - 1 \geq 0$ y por lo tanto g está bien definida.

Mostraremos que g es biyectiva.

(i) Veamos que g es inyectiva. Supongamos que $b, b' \in B$ son tales que $g(b) = g(b')$. Notemos que para todo $a \in B$, $a \in rango(f)$ si, y sólo si, $g(a) \in rango(f)$. Por consiguiente sólo hay dos caso a considerar:

   (1) Supongamos que $b, b' \in rango(f)$, entonces tenemos que $f(h(b)-1) = f(h(b')-1)$. Como f es inyectiva entonces, $h(b) = h(b')$ y como h también es inyectiva, entonces $b = b'$.

   (2) Supongamos que $b, b' \notin rango(f)$, entonces $g(b) = b$ y $g(b') = b'$. Por lo tanto $b = b'$.

(ii) Veamos que g es sobreyectiva. Sea $a \in A$, entonces de nuevo hay dos casos posibles:

   (1) $a \in rango(f)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = a$. Como h es biyectiva entonces existe un $b \in rango(f)$ tal que $h(b) = n + 1$. Ya que $h(f(0)) = 0$ y $h(b) \geq 1$, entonces $f(0) \neq b$ es decir, $b \in B$. Por definición de g tenemos que $g(b) = a$.

   (2) $a \notin rango(f)$. Entonces tenemos que $a \in B$ y $g(a) = a$.

□

Ejercicios 5.3

1. Muestre que para todo $n, m \geq 1$ naturales con $m \neq n$ se tiene que $\{1, \cdots, n\} \not\approx \{1, \cdots, m\}$.

2. Muestre que $\mathbb{Z} \setminus \{-2, -3, -4\} \approx \mathbb{N}$.

   (*Sugerencia:* Recuerde que $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$ y que $\mathbb{N} \setminus F \approx \mathbb{N}$ para todo conjunto finito $F \subseteq \mathbb{N}$).

3. Use el teorema 5.31 para mostrar que los siguientes conjuntos son infinitos.

   a) El conjunto de todos los números enteros pares mayores que 25.

   b) El intervalo $(2, 5/2)$.

   c) En general, el intervalo (a, b) donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$.

   d) El conjunto $\mathbb{Z} \setminus A$ donde $A \subseteq \mathbb{Z}$ es un conjunto finito.

   e) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$.

   f) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

g) El conjunto de todos los enteros múltiplos de 5.

h) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

i) $[0, 1/2] \setminus \mathbb{Q}$.

j) El conjunto de todas las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.

k) El conjunto de todas las funciones de $\mathbb{N}$ en $\{0, 1\}$.

4. Halle un subconjunto propio de cada uno de los conjuntos del ejercicio #3 que sea equipotente con el conjunto dado.

5.4. Algunos ejemplos importantes

Sean A y B conjuntos. Denotaremos por B^A al conjunto de todas las funciones de A en B. En esta sección nos ocuparemos en estudiar, desde el punto de vista que nos da la relación de equipotencia, los conjuntos

$$A \times B \qquad \mathcal{P}(A) \quad B^A.$$

Comenzaremos por el producto cartesiano.

Ejemplo 5.34. Mostraremos que

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Como $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$ (ver el ejemplo 5.21), fijemos una biyección $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. Definimos $H : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de la siguiente manera

$$H((n, m)) = (f(n), f(m)).$$

Mostraremos que H es una biyección.

(i) H es inyectiva. Sea $(n, m), (n', m')$ dos pares ordenados en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y supongamos que $H(n, m) = H(n', m')$. Mostraremos que $(n, m) = (n'.m')$. En efecto, por la definición de H tenemos que $(f(n), f(m)) = (f(n'), f(m'))$. Por lo tanto $f(n) = f(n')$ y $f(m) = f(m')$. Como f es inyectiva, concluimos que $n = n'$ y $m = m'$.

(ii) H es sobreyectiva. Sea $(k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Mostraremos que existe $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $f(n, m) = (k, l)$. En efecto, como f es sobreyectiva, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $f(n) = k$ y $f(m) = l$. Es fácil verificar que $H(n, m) = (k, l)$.

□

El siguiente teorema es un resultado general relacionado con el ejemplo anterior.

Teorema 5.35. *Sean A, B, C y D tales que $A \approx B$ y $C \approx D$. Entonces*

$$A \times C \approx B \times D.$$

□

Ahora estudiaremos el conjunto potencia.

Ejemplo 5.36. Mostraremos que

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathcal{P}(\mathbb{Z}).$$

Fijemos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ una biyección. Definimos $H : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ de la siguiente manera

$$H(A) = \{f(n) : \ n \in A\}.$$

Mostraremos que H es una biyección.

(i) H es inyectiva. Sean $A, B \subseteq \mathbb{N}$ distintos, mostraremos que $H(A) \neq H(B)$. Como $A \neq B$, hay dos casos a considerar.

   (a) Supongamos que existe $x \in A \setminus B$. Entonces, como f es inyectiva, concluimos que no existe $y \in B$ tal que $f(y) = f(x)$. Por lo tanto $f(x) \in H(A) \setminus H(B)$.

   (b) Supongamos que existe $x \in B \setminus A$. Este caso lo dejaremos a cargo del lector, pues se hace de manera análoga al caso (a).

(ii) H es sobreyectiva. Sea $B \subseteq \mathbb{Z}$ y consideremos el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : \ f(n) \in B\}$. Como f es sobreyectiva, tenemos que para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Esto muestra que $H(A) = B$.

□

Un resultado general relacionado con el ejemplo anterior es el siguiente:

Teorema 5.37. *Si $X \approx Y$, entonces $\mathcal{P}(X) \approx \mathcal{P}(Y)$.*

□

Ejemplo 5.38. Mostraremos que

$$\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

Como antes, fijemos una biyección $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. Considere la función $H : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ definida por

$$H(f) = h \circ f.$$

Mostraremos que H es una biyección.

(i) H es inyectiva. En efecto, sean $f, f' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dos funciones distintas. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) \neq f'(n)$. Como h es inyectiva, entonces $h(f(n)) \neq h(f'(n))$ y esto muestra que $H(f) \neq H(f')$.

(ii) H es sobreyectiva. Sea $g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Mostraremos que existe $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $H(f) = g$. En efecto, sea $f = h^{-1} \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. tenemos que

$$H(f) = h \circ (h^{-1} \circ g) = (h \circ h^{-1}) \circ g = 1_{\mathbb{Z}} \circ g = g.$$

□

El siguiente teorema es un resultado general relacionado con el ejemplo anterior.

Teorema 5.39. *Sean A, B, C y D tales que $A \approx B$ y $C \approx D$. Entonces*

$$C^A \approx D^B.$$

□

Ejercicios 5.4

1. Para responder las preguntas que siguen imite lo hecho en el ejemplo 5.34. Describa la biyección que muestra lo requerido.

   a) Muestre que $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R} \times \mathbb{N}$.

   b) Muestre que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

   c) Sean A y B conjuntos no vacíos. Muestre que $A \times B \approx B \times A$.

2. Para responder las preguntas que siguen imite lo hecho en el ejemplo 5.36. Describa la biyección que muestra lo requerido.

   a) Sea P la colección de números naturales pares y I la colección de números naturales impares. Muestre que $\mathcal{P}(P) \approx \mathcal{P}(I)$.

   b) Sea $A = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq 4\}$ y $B = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 8\}$. Muestre que $\mathcal{P}(A) \approx \mathcal{P}(B)$.

   c) Muestre que $\mathcal{P}((-1, 2)) \approx \mathcal{P}((3, 4))$.

   d) Muestre que $\mathcal{P}((0, +\infty)) \approx \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

3. Sea A y B dos conjuntos no vacíos. Muestre que si A o B es infinito, entonces A^B es infinito.

   (*Sugerencia:* Use el teorema 5.31).

4. Muestre que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$.

   (*Sugerencia:* Sea $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ una biyección. Dada $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ queremos asociar a f una función $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Considere el siguiente diagrama donde $\dashrightarrow$ indica la función g que queremos definir.

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & \mathbb{N} & \\ h^{-1} & \uparrow & & \downarrow & h \\ & \mathbb{Z} & \dashrightarrow & \mathbb{Z} & \end{array}$$

   Es natural entonces pensar que g debe ser $h \circ f \circ h^{-1}$. Esto sugiere definir $H : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ de la siguiente manera:

$$H(f) = h \circ f \circ h^{-1}$$

   Muestre que H es una biyección.)

5. Muestre que $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \approx \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

   (*Sugerencia:* Fije una biyección $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ y defina $H : \mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ de la manera siguiente
   $$H(f) = f \circ h.$$
   Muestre que H es una biyección).

6. Use los teoremas 5.35, 5.37 y 5.39 para mostrar lo siguiente

   a) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{N}$.

   b) $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}) \approx \mathcal{P}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$.

   c) $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \times \mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \times \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

   d) $(0,1)^{\mathbb{R}} \approx \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

   e) $\mathbb{N}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})} \approx \mathbb{Z}^{\mathcal{P}(\mathbb{Z})}$.

   f) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}) \approx \mathcal{P}((0,1) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

7. Considere los siguientes conjuntos
   $$A = \{3n : \ n \in \mathbb{N}\} \quad B = \{5n+2 : \ n \in \mathbb{N}\} \quad C = \{7n-1 : \ n \in \mathbb{Z}\}.$$
   Muestre que

   a) $A \approx B$, $B \approx C$.

   b) $A \times B \approx B \times \mathbb{N}$.

   c) $\mathcal{P}(A^{\mathbb{N}}) \approx \mathcal{P}(\mathbb{Z}^{B})$.

8. Muestre el teorema 5.35. Sean A, B, C y D tales que $A \approx B$ y $C \approx D$. Entonces $A \times C \approx B \times D$.

   (*Sugerencia:* Fije biyecciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$ y defina $F : A \times C \to B \times D$ de la manera siguiente
   $$F((a,c)) = (f(a), g(c))$$
   Muestre que F es una biyección).

9. Muestre el teorema 5.37. Si $X \approx Y$ entonces $\mathcal{P}(X) \approx \mathcal{P}(Y)$.

   (*Sugerencia:* Dada una biyección $f : X \to Y$, considere la función $G : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ definida por
   $$G(C) = \{f(c) : \ c \in C\}.$$
   Donde $C \in \mathcal{P}(X)$. Muestre que G es una biyección).

10. *a*) Sean A, B y C conjuntos no vacíos tales que $B \approx C$. Muestre que $A^B \approx A^C$. (*Sugerencia:* Imite lo hecho en el ejemplo 5.38).

    b) Sean A, B y C conjuntos no vacíos tales que $B \approx C$. Muestre que $B^A \approx C^A$.

    c) Use (a) y (b) para mostrar el teorema 5.39. Si $A \approx C$ y $B \approx D$, entonces $A^B \approx C^D$.

11. Sean A, B y C conjuntos. Muestre que

    a) Si $B \cap C = \emptyset$, entonces $A^{B \cup C} \approx A^B \times A^C$.

    b) $(A \times B)^C \approx A^C \times B^C$.

    c) $(A^B)^C \approx A^{B \times C}$.

5.4.1. Operaciones generalizadas

Vimos varios ejemplos de generalizaciones de algunas de las leyes del álgebra de conjuntos. Por ejemplo,

$$A \cup (B \cap C \cap D) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (A \cup D).$$

Es natural esperar que algo similar se cumple si en lugar de tener 4 conjuntos tenemos 5. Es decir,

$$A \cup (B \cap C \cap D \cap E) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (A \cup E).$$

Para expresar leyes similares a éstas, donde intervengan colecciones arbitrarias de conjuntos, usaremos los **subíndices**. Por ejemplo, si tenemos n conjuntos (donde n es un número natural), los denotaremos de la siguiente manera:

$$A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n.$$

Los números 1, 2, .., n se llaman subíndices y juegan el papel de etiquetas y sirven para distinguir los conjuntos. La colección $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n$ se dice que es una colección **indizada** y el conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$ es el **conjunto de índices** de esta colección. Es común que las familias indizadas se denoten por

$$\{A_i\}_{i=1}^n.$$

El conjunto de índice depende del problema que se esté resolviendo como veremos en los ejemplos.

La ley distributiva se puede expresar de manera general de la siguiente forma: sean A_1, $A_2 \cdots$, A_n y B conjuntos, entonces se cumple

$$B \cup (A_1 \cap \cdots \cap A_n) = (B \cup A_1) \cap \cdots \cap (B \cup A_n).$$

La demostración de este hecho se verá más adelante. La parte derecha de la expresión de arriba también tiene una notación especial. Si $A_1, \cdots, A_n$ son conjuntos, entonces la unión de todos ellos $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ se escribe

$$\bigcup_{i=1}^n A_i$$

y la intersección $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ se escribe

$$\bigcap_{i=1}^n A_i.$$

Con esta notación podemos expresar la ley distributiva que mencionáramos arriba de la siguiente manera

$$B \cup [\bigcap_{i=1}^{n} A_i\,] \;=\bigcap_{i=1}^{n}(B \cup A_i)$$

y la generalización de la otra ley distributiva es

$$B \cap [\bigcup_{i=1}^{n} A_i\,] \;=\bigcup_{i=1}^{n}(B \cap A_i).$$

Antes de continuar con las generalizaciones de la leyes del álgebra de conjuntos veamos algunos ejemplos de colecciones indizadas.

Ejemplos 5.40. 1. Considere la familia indizada $\{A_i\}_{i=0}^{5}$ definida por

$$A_i = \{n + i :\; 0 \leq n \leq 3\} \quad \text{con } i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Así por ejemplo tenemos que

$$\begin{array}{lll} A_0 = \{0, 1, 2, 3\} & A_1 = \{1, 2, 3, 4\} & A_2 = \{2, 3, 4, 5\} \\ A_3 = \{3, 4, 5, 6\} & A_4 = \{4, 5, 6, 7\} & A_5 = \{5, 6, 7, 8\} \end{array}$$

Tenemos además que

$$\bigcup_{i=0}^{5} A_i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Dijimos que los índices son como etiquetas que se le colocan a los conjuntos para diferenciarlos. En algunos casos los índices están estrechamente relacionados con los elementos del conjunto que lleva el índice. Esto ocurrió en el ejemplo que estamos estudiando. Pues conociendo el índice y la regla de formación de los conjuntos tenemos toda la información necesaria para determinar los elementos del conjunto. Por ejemplo, A_3 consiste de todos los números de la forma $n + 3$ con $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

2. Consideremos I el conjunto de todas las secciones de Mat10 que se dictan en la facultad de ciencias durante el semestre A-98. Para cada $i \in I$ sea

$$\begin{array}{lll} A_i & = & \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es el número de cédula} \\ & & \text{de un estudiante inscrito en la sección } i \text{ de Mat10}\}. \end{array}$$

Tenemos definida de esta manera una familia indizada de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$. A pesar de no tener a la mano los elementos de cada conjunto de esta familia, podemos afirmar que dados dos indices i y j distintos se cumple que $A_i \cap A_j = \emptyset$ (¿por qué?).

3. Podemos definir familias indizadas de conjuntos donde el conjunto de índices es muy grande. Por ejemplo, para cada $n \in \mathbb{N}$ positivo considere el conjunto

$$D_n = \{k \in \mathbb{N} :\; n \text{ divide a } k\}.$$

Esta familia la podemos denotar de varias maneras

$$\{D_n\}_{n\in I} \qquad \{D_n\}_{n=1}^{\infty}$$

donde el conjunto de índices I es $\{n \in \mathbb{N} : \ n \geq 1\}$ y el símbolo ∞ se lee "infinito" y se sobrentiende que los índices son números naturales desde el 1 en adelante. Veamos algunos de estos conjuntos

$$\begin{array}{l} D_1 = \mathbb{N} \\ D_2 = \{k \in \mathbb{N} : \ k \text{ es par}\} \\ D_7 = \{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, \cdots\} = \{7m : \ m \in \mathbb{N}\}. \end{array}$$

Por ejemplo, tenemos que

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=2}^{5} D_i &= D_2 \cap D_3 \cap D_4 \cap D_5 \\ &= \{k \in \mathbb{N} : \ k \text{ es divisible por 2, 3, 4, y 5}\} \\ &= \{k \in \mathbb{N} : \ k \text{ es divisible por } 60\}. \end{aligned}$$

Podemos también tomar la unión o la itersección de todos los conjuntos indizados. En este caso escribiremos

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \quad , \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i.$$

Notemos que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i = \mathbb{N} \quad , \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i = \{0\}.$$

□

Observación: El conjunto de índices no tiene porque ser necesariamente formado por números. En el ejercicio 6 el lector encontrará un ejemplo donde los índices son a su vez conjuntos.

Sean $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ y $\{B_j\}_{j=1}^{m}$ dos familias indizadas la primera con n conjuntos y la segunda con m conjuntos. Observe que hemos usado la letra j para denotar los índices de la segunda familia, esto se hace para evitar confusiones entre los índices. Ahora podemos expresar las generalizaciones de las leyes distributivas de la siguiente manera:

$$[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\ ] \ \cap \ [\bigcup_{j=1}^{m} B_j\ ] = \bigcup_{i=1,2,\cdots,n\ ;\ j=1,2,\cdots,m} (A_i \cap B_j)$$

$$[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\ ] \ \cup \ [\bigcap_{j=1}^{m} B_j\ ] = \bigcap_{i=1,2,\cdots,n\ ;\ j=1,2,\cdots,m} (A_i \cup B_j)$$

Los subíndices en el lado derecho de estas igualdades pueden parecer a primera vista horrorosos. Más adelante veremos otra manera de escribir esta leyes con una mejor notación para el lado derecho de las igualdades. Veamos que dicen estas leyes cuando $n = 3$ y $m = 2$

$$\begin{aligned}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap (B_1 \cup B_2) &= (A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1) \cup \\ &\quad (A_2 \cap B_2) \cup (A_3 \cap B_1) \cup (A_3 \cap B_2)\\ \\ (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (B_1 \cap B_2) &= (A_1 \cup B_1) \cap (A_1 \cup B_2) \cap (A_2 \cup B_1) \cap \\ &\quad (A_2 \cup B_2) \cap (A_3 \cup B_1) \cap (A_3 \cup B_2).\end{aligned}$$

Algo similar ocurre con las leyes de DeMorgan. Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una familia indizada de subconjuntos de un conjunto universal U, entonces

$$\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right]^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$$

$$\left[\bigcap_{i=1}^n A_i\right]^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c.$$

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia indizada de conjuntos, donde I es el conjunto de índices (recordemos que I no es necesariamente $\mathbb{N}$, puede ser un subconjunto de $\mathbb{N}$ o quizá otro conjunto). Cuando se trabaje con uniones e intersecciones generalizadas es importante tener presente la siguientes observaciones que pueden ser consideradas una definición de los símbolos $\bigcup_i A_i$ y $\bigcap_i A_i$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} x \in \bigcup_{i\in I} A_i & \text{si, y sólo si, existe } i \in I \text{ tal que } x \in A_i \\ \\ x \in \bigcap_{i\in I} A_i & \text{si, y sólo si, } x \in A_i \text{ para todo } i \in I. \end{array}}$$

Podemos expresar las leyes distributivas generalizadas usando una notación donde interviene el producto cartesiano. Sean $\{A_i\}_{i=1}^n$ y $\{B_j\}_{j=1}^m$ dos familias indizadas de conjuntos. Denotaremos con I el conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$ y con J el conjunto $\{1, 2, \cdots, m\}$. Entonces tenemos que

$$[\bigcup_{i=1}^n A_i\,] \cap [\bigcup_{j=1}^m B_j\,] = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$$

$$[\bigcap_{i=1}^n A_i\,] \cup [\bigcap_{j=1}^m B_j\,] = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)$$

Los cuantificadores son de uso muy frecuente en matemáticas. En muchos casos sirven para abreviar expresiones que serían engorrosas de escribir de otra manera. Por ejemplo, sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia indizada de conjuntos, entonces

$$\boxed{\begin{aligned} x \in \bigcup_{i\in I} A_i &\Leftrightarrow \exists i \in I\ (x \in A_i) \\ x \in \bigcap_{i\in I} A_i &\Leftrightarrow \forall i \in I\ (x \in A_i). \end{aligned}}$$

Ya vimos como se denota el productor cartesiano de tres conjuntos: usamos tripletas ordenadas (x, y, z). También podemos definir el producto cartesiano de más de tres conjuntos. Para hacerlo introducimos el concepto de **tuplas ordenadas** que hace uso de la notación con subíndices que vimos anteriormente. Digamos que tenemos n conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ definimos una **n-tupla ordenada** como una expresión de la forma

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

donde cada x_i pertenece al correspondiente conjunto A_i.

Dos n-tuplas son iguales cuando todas sus componentes son respectivamente iguales, más precisamente tenemos

$$\boxed{(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \text{ si, y sólo si } x_1 = y_2,\ x_3 = y_3, \cdots, x_n = y_n.}$$

El producto cartesiano de los conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ se define como la colección de todas la n-tuplas, más precisamente,

$$\boxed{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) :\ x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \cdots, x_n \in A_n\}}$$

En general A^n denota el producto cartesiano de A por si mismo n veces.

Ejercicios 5.4.1:

1. Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sea $A_i = \{n \cdot i : 0 \leq n \leq 3\}$.
   a) Determine por extensión los conjuntos A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5.
   b) Determine los elementos de $A_3 \triangle A_5$ y $A_5 \cap A_4$.
2. Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sea $A_i = \{n^i : 0 \leq n \leq 3\}$.
   a) Determine por extensión los conjuntos A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5.

b) Determine los elementos de $A_3 \triangle A_5$ y $A_5 \cap A_4$.

3. Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de todos los números naturales positivos. Considere los siguientes conjuntos

$$D_n = \{k \in \mathbb{P} : \ k \text{ es múltiplo de } n\}$$

para cada $n \in \mathbb{P}$. Determine los siguientes conjuntos donde el conjunto universal es $\mathbb{P}$.

a) $D_2 \cap D_5$	b) $D_2 \cap D_3 \cap D_5$	c) $D_2 \cap D_4$
d) $D_4 \cap D_6$	e) $D_4 \triangle D_6$	f) $D_2 \triangle D_6$
g) D_2^c	h) $D_4^c \cup D_6^c$	i) $D_4^c \triangle D_6^c$

4. En este ejercicio el conjunto universal es $\mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{P}$, sea

$$\begin{array}{lclcl} A_n & = & \{n, n+1, n+2, \cdots\} & = & \{k \in \mathbb{N} : \ k \geq n\} \\ B_n & = & \{0, 1, 2, 3 \cdots, 2n\} & = & \{k \in \mathbb{N} : \ k \leq 2n\}. \end{array}$$

a) Determine A_4 y B_4.

b) Determine $A_n \cap B_n$ y A_n^c para $n = 1, 2, 3$ y 7.

c) Determine $\bigcup_{n=3}^{6} A_n$, $\bigcup_{n=3}^{6} B_n$, $\bigcap_{n=3}^{6} A_n$, $\bigcap_{n=3}^{6} B_n$.

d) Determine $\bigcup_{n=3}^{\infty} A_n$, $\bigcup_{n=3}^{\infty} B_n$, $\bigcap_{n=3}^{\infty} A_n$, $\bigcap_{n=3}^{\infty} B_n$.

e) Determine $\bigcup_{n=1}^{5} A_n^c$, y $\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n)^c$.

5. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ sea $A_n = \{n, n+1\}$. El conjunto universal es $\mathbb{Z}$.

a) Determine $\bigcup_{n=-6}^{6} A_{2n+1}$, $\bigcup_{n=-6}^{6} A_{2n}$, $\bigcap_{n=-6}^{6} A_{2n+1}^c$.

b) Muestre que $\mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_{2n}$

c) Determine $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_{2n+1}$.

d) Muestre que si $n - m = 1$, entonces $A_n \cap A_m \neq \emptyset$

e) Muestre que si $n - m > 1$, entonces $A_n \cap A_m = \emptyset$.

f) ¿Para cuáles valores de n y m se cumple que $A_n \cap A_m \neq \emptyset$?

6. Sea $I = \mathcal{P}(\{0, 1\})$ y defina la colección indizada $\{C_A\}_{A \in I}$ de la manera siguiente

$$C_A = \{B \subseteq \{0, 1, 2\} : A \subseteq B\}$$

a) Determine $C_\emptyset$, $C_{\{0\}}$, $C_{\{1\}}$ y $C_{\{0,1\}}$.

   b) Muestre que $C_{\{0\}} \cap C_{\{1\}} = C_{\{0,1\}}$.

7. Considere la familia indizada $A_i = \{n \cdot i : 0 \leq n \leq 5\}$ para $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

   a) Determine A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5.

   b) Verifique que $A_0 \subseteq A_i$ para todo $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

   c) Determine $A_3 \triangle A_5$.

8. Considere la familia indizada $A_i = \{n^i : 0 \leq n \leq 5\}$ para $i \in \mathbb{N}$. Muestre que $A_4 \subseteq A_2$.

9. Sea $A_0 = \{n \in \mathbb{Z} : \ n \text{ es divisible por } 5\}$ y para cada $k \in \mathbb{P}$ sea $A_k = \{n + k : \ n \in A_0\}$.

   a) Enumere varios elementos de A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, y A_6.

   b) Muestre que $A_0 = A_5$ y que $A_1 = A_6$.

   c) Generalice sus respuestas de la parte (b).

   d) Determine $\bigcup_{k=0}^{4} A_k$ y $\bigcup_{k=1}^{5} A_k$.

10. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ sea $B_n = \{n, n + 1, n + 2\}$.

    a) Determine $\displaystyle\bigcup_{n=-6}^{6} B_{3n+1}$.

    b) Determine $\displaystyle\bigcup_{n=-6}^{6} B_{3n}$.

    c) Muestre que $\displaystyle\mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B_{3n}$.

    d) Determine $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B_{3n+1}$.

    e) Muestre que si $n - m = 1$ o $n - m = 2$, entonces $B_n \cap B_m \neq \emptyset$.

    f) Muestre que si $n - m > 2$, entonces $B_n \cap B_m = \emptyset$.

    g) ¿Para cuáles valores de n y m se cumple que $B_n \cap B_m \neq \emptyset$?

    h) ¿Para cuáles valores de n, m y k se cumple que $B_n \cap B_m \cap B_k \neq \emptyset$?

11. Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Para cada $y \in B$ definimos

$$D_y = \{y\} \times B$$

    y consideramos a $\{D_y\}_{y \in B}$ una familia indizada con B como conjunto de índices. Muestre que

$$A \times B = \bigcup_{y \in B} D_y$$

12. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$A_n = \{n\} \times \mathbb{N} \qquad B_n = \mathbb{N} \times \{n\}.$$

De esta manera tenemos definidas dos familias indizadas $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$.

a) Muestre que $A_n \cap A_m = \emptyset$ si, y sólo si $n \neq m$.

b) Determine $A_5 \cap B_2$. En general, determine $A_n \cap B_m$.

c) Muestre que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$

d) Determine $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$

e) Considere que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es el conjunto universal y determine

$$\left[\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=3}^{\infty} B_n\right]^c$$

5.5. El teorema de Schröder-Bernstein

Para los conjuntos finitos tenemos la noción de número de elementos la cual nos permitió introducir las notaciones

$$|A| = n \qquad |A| \leq |B|.$$

En esta sección extenderemos esta notación a los conjuntos infinitos y estudiaremos sus propiedades.

Definición 5.41. *Sean A y B dos conjuntos. Escribiremos*

$$|A| \leq |B|$$

si existe una función $f : B \to A$ sobreyectiva.

Comenzaremos mostrando que la relación $\leq$ que acabamos de introducir es reflexiva y transitiva.

Teorema 5.42. *Sean A, B y C conjuntos. Entonces se tiene que*
(i) $|A| \leq |A|$.
(ii) Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$, entonces $|A| \leq |C|$.

Demostración: (i) Pues $A \approx A$.

(ii) Sean $f : B \to A$ y $g : C \to B$ funciones sobreyectiva. Entonces $f \circ g : C \to A$ es sobreyectiva (por ser la composición de sobreyectivas) y por lo tanto $|A| \leq |C|$.

□

Teorema 5.43. *Sean A y B dos conjuntos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*
(i) Existe una función inyectiva $f : A \to B$.
(ii) Existe una función sobreyectiva $g : B \to A$.

Demostración: $(i) \Rightarrow (ii)$ Sea $f : A \to B$ una función inyectiva. Si f es sobreyectiva, entonces tomamos $g = f^{-1}$. Si f no es sobreyectiva, escogemos a_0 cualquier elemento de A. Como f es inyectiva, dado $b \in rango(f)$ existe un único $a \in A$ tal que $f(a) = b$, con esto en mente definimos $g : B \to A$ de la siguiente manera

$$g(b) = \begin{cases} a & , \text{si } b \in rango(f) \text{ y } f(a) = b \\ a_0 & , \text{si } b \notin rango(f). \end{cases}$$

Mostraremos que g es sobreyectiva. En efecto, sea $a \in A$ y pongamos $b = f(a)$, entonces se tiene que $g(b) = a$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sea $g : B \to A$ una función sobreyectiva. Para cada $a \in A$ sabemos que existe al menos un elemento $b \in B$ tal que $g(b) = a$. Fijemos entonces para cada $a \in A$ un elemento $b_a \in B$ tal que $g(b_a) = a$. Definimos $f : A \to B$ de la siguiente manera:

$$f(a) = b_a.$$

Mostraremos que f es inyectiva. Sean $a, a' \in A$ diferentes. Entonces por la manera que escogimos b_a y $b_{a'}$ tenemos que $g(b_a) = a$ y $g(b_{a'}) = a'$. Por consiguiente $b_a \neq b_{a'}$, pues de lo contrario g no sería una función.

□

Observaciones:

(i) Por el teorema 5.43 tenemos que $|A| \leq |B|$ es equivalente a decir que existe una función inyectiva $f : A \to B$.

(ii) Observe que si $A \approx B$, entonces $|A| \leq |B|$.

□

Ejemplos 5.44. 1. Si $A \subseteq B$, entonces $|A| \leq |B|$. En efecto, considere la función $f : A \to B$, dada por $f(x) = x$. Es claro que f es inyectiva. En consecuencia tenemos que: $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$, $|\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{Q}|$, $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{R}|$.

2. Ya vimos que el conjunto P de los números naturales pares y el conjunto I de los impares son equipotentes. En particular esto dice que $|P| \leq |I|$ y también que $|I| \leq |P|$. □

El siguiente teorema nos da una herramienta importante para determinar cuando dos conjuntos son equipotentes.

Teorema 5.45. *(Schröder-Bernstein) Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$, entonces $A \approx B$.* □

La demostración la haremos al finalizar esta sección.

Definición 5.46. *Sean A y B conjuntos. Si $A \approx B$, entonces escribiremos*

$$|A| = |B|.$$

Y por otra parte, si $|A| \leq |B|$ pero $|A| \neq |B|$, entonces escribiremos

$$|A| < |B|.$$

□

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de los teoremas 5.43 y 5.45 y nos dice que las relaciones $\leq$ y $=$ que hemos definido entre conjuntos tienen las propiedades que uno espera.

Teorema 5.47. *Sean A y B conjuntos. Se tiene que*

(i) $|A| = |B|$ si, y sólo si, $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$.

(ii) $|A| < |B|$ si, y sólo si, existe una inyección de A en B y no existe una inyección de B en A.

(iii) $|A| < |B|$ si, y sólo si, existe una función sobreyectiva de B en A y no existe una función sobreyectiva de A en B.

□

Ejemplo 5.48. Usaremos el teorema 5.45 para mostrar que

$$\mathbb{R} \approx [0,1].$$

Ya que $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$, entonces $|[0,1]| \leq |\mathbb{R}|$. Resta mostrar que $|\mathbb{R}| \leq |[0,1]|$. Recordemos que $\mathbb{R} \approx (0,+\infty)$ (ver ejemplo 5.23). Por otra parte tenemos que $(0,+\infty) \approx (0,1)$. En efecto, la función $f:(0,1) \to (0,+\infty)$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{x} - 1$$

es una biyección como lo puede verificar el lector interesado.

Por lo tanto tenemos por la transitividad de $\approx$ que $\mathbb{R} \approx (0,1)$ y en consecuencia $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Como $|(0,1)| \leq |[0,1]|$ (¿por qué?) y $\leq$ es transitiva, entonces obtenemos que $|\mathbb{R}| \leq |[0,1]|$. Hemos verificado así que las hipótesis del teorema 5.45 se satisfacen y por lo tanto concluimos que $\mathbb{R} \approx [0,1]$.

Para que el lector tome conciencia de lo útil que es el teorema 5.45, lo invitamos a conseguir explícitamente una biyección de $\mathbb{R}$ *en* $[0,1]$.

□

Para finalizar esta sección, enunciaremos la ley de tricotomía para la cardinalidad. No presentaremos su demostración pues requiere de un principio de la teoría de conjuntos que no trataremos en este curso.

Teorema 5.49. *Sean A y B dos conjuntos. Entonces se cumple una, y sólo una, de las siguientes afirmaciones:*

(i) $|A| < |B|$.

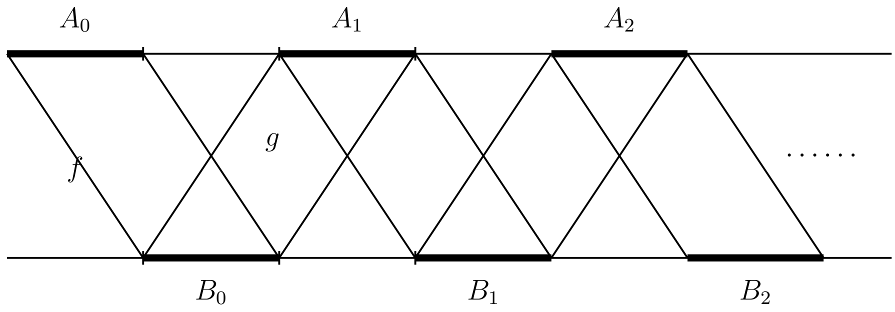
(ii) $|A| = |B|$.

(iii) $|B| < |A|$. □

5.5.1. Demostración del teorema de Schröder-Bernstein

Sean $f: A \to B$ y $g: B \to A$ funciones inyectivas. Para definir la biyección $h: A \to B$ necesitamos hacer un construcción auxiliar. Definiremos, para cada número natural n, subconjuntos $A_n \subseteq A$ y $B_n \subseteq B$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} A_0 & = & A \setminus g[B] \\ B_0 & = & f[A_0] \\ \\ A_1 & = & g[B_0] \\ B_1 & = & f[A_1] \\ & \vdots & \\ A_{n+1} & = & g[B_n] \\ B_{n+1} & = & f[A_{n+1}] \\ & \vdots & \end{array}$$



Sea

$$M = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

y

$$N = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \cdots$$

La verificación de las siguientes afirmaciones las dejaremos a cargo del lector.

$$\begin{array}{rcl} f[M] & = & N \\ g[N] & = & A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots \\ g^{-1}(A \setminus M) & = & B \setminus N. \end{array}$$

Notemos que si $x \in A \setminus M$, entonces $x \notin A_0$, es decir $x \in g[B]$ y por lo tanto $g^{-1}(x)$ está definido. Podemos entonces definir $h : A \to B$ como se indica a continuación:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{si } x \in M. \\ g^{-1}(x) & , \text{si } x \in A \setminus M. \end{cases}$$

Veamos que h es biyectiva:

(i) h es inyectiva. En efecto, observe que $h[M] = f[M] = N$ y $h[A \setminus M] = g^{-1}(A \setminus M) = B \setminus N$. En particular $h[M] \cap h[A \setminus M] = \emptyset$. Como f y g son inyectivas, de lo anterior se concluye que h es inyectiva (el lector interesado verificará esta afirmación).

(ii) h es sobreyectiva. Esto es claro pues vimos $h[M] = N$ y $h[A \setminus M] = B \setminus N$ y por lo tanto $h[A] = B$.

□

Ejercicios 5.45

1. Muestre que $|\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{Q}|$.

2. Muestre que $|\mathbb{N} \times \{0, 1\}| \leq |\mathbb{Z} \times \{0, 1, 2\}|$.

3. Muestre que $|\mathbb{N} \times \{1,2\}| \leq |\mathbb{Z} \times \{3,4\}|$.

4. Muestre que $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

5. Muestre que $(-1,1) \approx [-1,1]$.
   (*Sugerencia:* Muestre que $|(-1,1)| \leq |[-1,1]|$ y que $[-1,1] \approx [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$).

6. Muestre que $(1,2) \cup (4,5) \approx (3,4)$.
   (*Sugerencia:* Use la función definida en el ejercicio 2 de §5.2).

7. Sea P la colección de todos los números naturales pares. Muestre que $|P| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

8. Sean A y B conjuntos no vacíos. Muestre que $|A| \leq |A \times B|$.

9. Muestre que $|\mathbb{N}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

10. Sea A un conjunto. Muestre que $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$.

11. Muestre que $|\mathbb{N} \times \{1,2\}| = |\mathbb{N}|$.

12. Muestre que $|\mathbb{N} \times \{1,2,3\}| = |\mathbb{N}|$.

13. Muestre que $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$.

14. $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$.

15. Muestre que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})|$.

16. Complete la demostración del teorema 5.45 comprobando las siguientes afirmaciones:

$$\begin{aligned} f[M] &= N \\ g[N] &= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots \\ g^{-1}(A \setminus M) &= B \setminus N. \end{aligned}$$

5.6. Conjuntos numerables

En esta sección estudiaremos un tipo particular de conjunto infinito que juega un papel importante dentro de las matemáticas.

Definición 5.50. *Diremos que un conjunto A es **numerable** si $A \approx \mathbb{N}$.*

Observe que podemos expresar de manera equivalente que A sea numerable escribiendo $|A| = |\mathbb{N}|$.

Teorema 5.51. *Todo subconjunto de $\mathbb{N}$ es finito ó numerable.*

Demostración: Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Si A es finito, no hay nada que mostrar. Si A es infinito, entonces por el teorema 5.31 sabemos que $|\mathbb{N}| \leq |A|$. Como $A \subseteq \mathbb{N}$, entonces $|A| \leq |\mathbb{N}|$. Luego por el teorema de Schöeder-Bernstein 5.45 tenemos que $\mathbb{N} \approx A$.

□

Hemos visto que $\mathbb{Z}$ es numerable y el teorema 5.27 nos dice que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable. Ahora mostraremos que $\mathbb{Q}$ es numerable. Para hacerlo necesitaremos el siguiente resultado.

Teorema 5.52. *Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de conjuntos numerables. Entonces $\bigcup_n A_n$ es numerable.*

Demostración: Denotemos por A la unión de todos los conjuntos A_n, es decir

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Ya que $A_0 \subseteq A$, entonces $|A_0| \leq |A|$. Como A_0 es numerable, entonces $|\mathbb{N}| \leq |A|$. Mostraremos que $|A| \leq |\mathbb{N}|$. Después de mostrarlo podemos usar el teorema de Schröder-Bernstein 5.45 para concluir que A es equipotente con $\mathbb{N}$ y por lo tanto numerable.

Como cada A_n es numerable existe una biyección $f_n : \mathbb{N} \to A_n$. Definiremos una sobreyección $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$. Esto mostrará que $|A| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$. Como $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$, entonces $|A| \leq |\mathbb{N}|$. La definición de g es como sigue:

$$g(n, m) = f_n(m).$$

Veamos que g es sobreyectiva. Sea $a \in A$, entonces existe n tal que $a \in A_n$. Como f_n es sobreyectiva, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(m) = a$. Esto muestra que $g(n, m) = a$.

□

Teorema 5.53. $\mathbb{Q}$ *es numerable.*

Demostración: Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n > 0$ un conjunto A_n de la manera siguiente:

$$A_n = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Es claro que

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Para ver que $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$, por el teorema 5.52, bastaría ver que cada A_n es numerable. Es claro que la función $f_n : \mathbb{Z} \to A_n$ definida por $f_n(m) = \frac{m}{n}$ es biyectiva. Por consiguiente A_n es numerable.

□

Ejemplo 5.54. Sea X la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ con exactamente dos elementos. Es decir

$$X = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| = 2\}.$$

Mostraremos que X es numerable, es decir, que $|X| = |\mathbb{N}|$. Usaremos el teorema de Schröder-Bernstein 5.45. Para esto debemos mostrar dos cosas: $|\mathbb{N}| \leq |X|$ y $|X| \leq |\mathbb{N}|$.

(1) $|\mathbb{N}| \leq |X|$: Considere la siguiente función $f : \mathbb{N} \to X$ dada por

$$f(n) = \{0, n+1\}.$$

Entonces f es inyectiva (muéstrelo!). Por consiguiente $|\mathbb{N}| \leq |X|$.

(2) $|X| \leq |\mathbb{N}|$: Como $\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, entonces es suficiente mostrar que $|X| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$. Considere la función $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ dada por

$$g(n,m) = \begin{cases} \{n,m\} & \text{, si } n \neq m \\ \{n, n+1\} & \text{, si } n = m. \end{cases}$$

Verifique que g es sobreyectiva. Por lo tanto $|X| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

$\square$

Ejercicios 5.6

1. Muestre que los siguientes conjuntos son numerables:

   a) La colección de todos los números primos.

   b) La colección de todos los enteros múltiplos de 8.

   c) $\mathbb{N}^3$, $\mathbb{Q}^2$, $\mathbb{Q}^3$.

2. Determine cuáles de los siguientes conjuntos son numerables.

   a) $\{q \in \mathbb{Q} :$ Existe un entero m tal que $5m + 1 < q < 5m + 2\}$.

   b) $\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} :\ n$ es par y m es impar$\}$.

   c) $\{q \in \mathbb{Q} :\ q^2 < 2\}$.

   d) $\{q \in \mathbb{Q} : q^4 + 5q^3 - q^2 + 7q - 12 = 0\}$.

   e) $\{n \in \mathbb{N} :\ n$ divide a $1.567.344.987.678.333\}$.

   f) $\{(n,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q} :\ n$ es múltiplo de 5 y $q \geq 0\}$.

   g) $\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} :\ n$ divide a $m\}$.

3. Muestre que la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ con exactamente 3 elementos es numerable.

   (*Sugerencia:* Imite lo hecho en el ejemplo 5.54).

4. Muestre las siguientes afirmaciones.

   a) Todo subconjunto de un conjunto numerable es finito ó numerable.

   b) Todo conjunto infinito tiene un subconjunto numerable.

   c) Si $|\mathbb{N}| \leq |A|$, entonces A es infinito.

   d) A es finito ó numerable si, y sólo si, $|A| \leq |\mathbb{N}|$.

5. Si A es infinito y $A \subseteq B$, entonces B es infinito.

6. Sea B un conjunto infinito, y $A \subseteq B$ finito. Muestre que

   a) $B - A$ es infinito.

   b) $B - A \approx B$, esto no es tan fácil de ver. Los reto a que lo prueben!

7. Sean A y B conjuntos tales que $A \subseteq B$. Muestre que si A no es numerable, entonces B no es numerable.

8. Sea A un conjunto. Muestre que $A \times \mathbb{N}$ es numerable si, y sólo si, $|A| \leq |\mathbb{N}|$.

9. Muestre que si A y B son numerables, entonces $A \times B$ es numerable.

   (*Sugerencia:* Use el teorema 5.27).

10. Sea A un conjunto finito y $f : A \to A$ una función. Muestre que

    a) Si f es inyectiva, entonces es f biyectiva.

    b) Si f es sobreyectiva, entonces f es biyectiva.

    c) Halle una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que sea inyectiva pero no sea sobreyectiva. ¿Qué tiene esto que ver con lo mostrado en (a)?

    d) Halle una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que sea sobreyectiva pero no sea inyectiva. ¿Qué tiene esto que ver con lo mostrado en (b)?

11. Muestre que la función $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$g(a, b) = \frac{(a + b + 1)(a + b + 2)}{2} - a - 1$$

    es biyectiva.

    (*Sugerencia:* Use inducción para mostrar que $rango(g) = \mathbb{N}$).

12. Considere la regla

$$(a, b) \mapsto 2^a(2b + 1) - 1$$

    que mostramos define una biyección de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ (ver el teorema 5.27). Determine si esa regla define una inyección entre

    a) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.

    b) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

13. Sean A_n conjuntos, $n \in \mathbb{N}$. Si $|A_n| \leq |\mathbb{N}|$. Muestre que

$$|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n| \leq |\mathbb{N}|.$$

14. Sean A y B conjuntos numerables. Muestre que $A \cup B$ es numerable.

15. Muestre que la colección X de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ es numerable.

    (*Sugerencia:* Muestre primero que para cada $n \in \mathbb{N}$ la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ con exactamente n elementos es numerable. Después observe que X es la unión numerable de conjuntos numerables).

5.7. Aplicaciones del teorema de Schröder-Bernstein

En matemáticas aparecen con frecuencia conjuntos que tienen la misma cardinalidad que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. En esta sección veremos algunos ejemplos.

Ejemplo 5.55. Mostraremos que

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Considere la función $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dada por

$$F(A) = f_A.$$

Donde f_A es la función característica de A (ver la definición 4.10). Dejamos como ejercicio al lector verificar que F es una biyección.

□

Ejemplo 5.56. Mostraremos que

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

Como $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y, por lo visto en el ejemplo 5.55, $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$, entonces tenemos que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$. Bataría entonces ver que $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Pues por el teorema de Schröder-Bernstein podemos concluir que esos dos conjuntos son equipotentes.

Recordemos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$ y por consiguiente por el teorema 5.37 tenemos que

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}).$$

Ahora bien, cada función $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es una relación binaria sobre $\mathbb{N}$. Es decir, cada función $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es un subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. En otras palabras, tenemos que

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ f \text{ es una función}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}).$$

Y por lo tanto

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})|$$

y en consecuencia

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|.$$

□

Ejemplo 5.57. Mostraremos que

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}.$$

Es suficiente mostrar que

$$|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leq |\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}| \text{ y } |\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}| \leq |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|.$$

La primera desigualdad es clara pues $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ (¿por qué?). Por otra parte, como $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (¿por qué?), entonces

$$|\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|.$$

De 5.55 y 5.56 sabemos que

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}.$$

Por lo tanto

$$|\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}| \leq |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$$

y con esto termina la demostración.

□

Ejercicios 5.7

1. Muestre que $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx \{4,5,6,7,8\}^{\mathbb{N}}$.
2. Muestre que $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.
3. Muestre que $|\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$.
4. Muestre que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \approx \mathbb{R}$.

   (*Sugerencia:* Halle una función inyectiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$).
5. Muestre que la función F definida en el ejemplo 5.55 es biyectiva.

   (*Sugerencia:* Para ver que F es inyectiva, tome $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ distintos. Entonces hay dos casos que se tratan de manera similar. Suponga que existe $x \in A \setminus B$ (¿Cual es el otro caso?). Entonces $f_A(x) = 1$ y $f_B(x) = 0$, por esto $f_A \neq f_B$. Para ver que F es sobreyectiva, sea $g : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ arbitraria. Tome $A = \{x \in \mathbb{N} : g(x) = 1\}$. Muestre que $g = F(A)$.)

5.8. El teorema de Cantor

Hasta ahora sólo hemos visto ejemplos de conjuntos infinitos numerables. El próximo teorema tuvo una enorme repercusión sobre la manera de concebir el infinito en matemáticas. Este resultado nos dice que existen conjuntos infinitos que no son equipotentes.

Teorema 5.58. *(Cantor) Sea A un conjunto, entonces $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

Demostración: Primero observemos que $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. En efecto, considere la función $f : A \to \mathcal{P}(A)$ dada por

$$f(a) = \{a\}$$

para $a \in A$. Es obvio que f es inyectiva.

Para ver que $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$, mostraremos que ninguna función $g : A \to \mathcal{P}(A)$ puede ser sobreyectiva. Sea entonces $g : A \to \mathcal{P}(A)$. Definimos

$$B = \{a \in A : \ a \notin g(a)\}.$$

Veremos que B no está en el rango de g. Supongamos que estuviera, y sea $a \in A$ tal que $g(a) = B$. Entonces tenemos que

$$a \in B \Leftrightarrow a \in g(a) \Leftrightarrow a \notin B.$$

Y esto es absurdo. Por lo tanto la suposición de que B estaba en el rango de g es imposible. En consecuencia g no es sobreyectiva.

□

Del teorema de Cantor inmediatamente obtenemos el siguiente resultado que dice que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es numerable.

Corolario 5.59. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *no es numerable.* □

Observemos lo siguiente

$$|\mathbb{N}| \ < \ |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \ < \ |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| \ < \ |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))|.$$

Esto muestra que estos conjuntos son de un tamaño infinito cada vez mayor.

Ejemplo 5.60. Considere la colección X de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que no contienen números pares. Es decir, si P denota la collección de números pares e I la de los impares tenemos que

$$X = \{A \subseteq \mathbb{N} : \ A \cap P = \emptyset\}$$

o de manera equivalente

$$X = \{A \subseteq \mathbb{N} : \ A \subseteq I\}.$$

Mostraremos que X no es numerable. Para esto es suficiente mostrar que $|X| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ y usar el teorema de Cantor. En efecto, recordemos que $I \approx \mathbb{N}$, por lo tanto $\mathcal{P}(I) \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (ver el ejercicio 9 de §5.2). En consecuencia $|X| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

□

Ejercicios 5.8

1. Ordene de manera creciente los siguientes conjuntos de acuerdo a su cardinalidad.

   a) $\mathbb{N}$.

   b) $\mathbb{Z}$.

   c) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

d) $\{n \in \mathbb{N} : \ n$ divide a 1.567.344.987.678.333$\}$.

e) $\{q \in \mathbb{Q} : $ Existe un entero m tal que $5m+1 < q < 5m+2\}$.

f) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$.

g) $\mathbb{Q}^5$.

h) $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$.

i) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

j) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}))$.

k) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$.

5.9. $\mathbb{R}$ no es numerable

En ésta sección mostraremos que $\mathbb{R}$ no es numerable. Para hacerlo necesitaremos una propiedad muy importante de los números reales. Antes de enunciarla daremos un ejemplo.

Ejemplo 5.61. Considere la siguiente colección de intervalos cerrados

$$I_n = \left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right]$$

para $n \in \mathbb{N}$. Por ejemplo,

$$I_0 = [-1,1] \quad , I_1 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad I_2 = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right].$$

Observe que

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$$

es decir, los intervalos van decreciendo con relación a $\subseteq$. Mostraremos que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{0\}.$$

En efecto, es obvio que $0 \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, mostraremos que si $r \neq 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r \notin I_n$. En efecto, como $|r| > 0$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|r| > \frac{1}{n+1}$ (propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$). Por lo tanto $r \notin I_n$.

□

La **longitud** de un intervalo $[a,b]$ se define como la diferencia de sus extremos, es decir, la longitud de $[a,b]$ es $b-a$. En el ejemplo anterior, tenemos que la longitud de I_n es

$$\frac{1}{n+1} - \left(-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1}$$

Observemos que dado $r > 0$ cualquiera existe un natural n tal que $\frac{2}{n+1} < r$. Esto dice que la longitud de los intervalos I_n del ejemplo anterior se hace tan pequeña como se quiera. Estos son los ingredientes del siguiente teorema.

Teorema 5.62. *(Principio de los intervalos encajados) Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de intervalos cerrados en $\mathbb{R}$ tales que*

(i) $I_{n+1} \subseteq I_n$,

(ii) Para todo $r > 0$ existe un n tal que longitud de I_n es menor que r.

Entonces existe un real z tal que

$$\bigcap_n I_n = \{z\}.$$

□

Demostración: Sea a_n, b_n los extremos de I_n, es decir, $I_n = [a_n, b_n]$. Por hipótesis $I_{n+1} \subseteq I_n$, por lo tanto

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n. \tag{5.4}$$

Es decir, tenemos que

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0$$

Sea A el siguiente conjunto

$$A = \{b_n : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

De (5.4) se tiene que cada a_n es una cota inferior de A. Por consiguiente A tiene ínfimo, sea z el ínfimo de A. Por la misma razón tenemos que $a_n \leq z$ para todo n. Por lo tanto $a_n \leq z \leq b_n$. Esto muestra que $z \in I_n$ para todo n.

Falta mostrar que z es el único elemento de $\bigcap_n I_n$. Supongamos que no es así y sea w otro real tal que $w \in I_n$ para todo n. Por lo tanto para todo n la longitud de I_n es mayor o igual que $|z - w|$. Pero esto contradice la hipótesis (ii).

□

Para demostrar que $\mathbb{R}$ no es numerable necesitamos el siguiente resultado auxiliar.

Lema 5.63. *Sea $F \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto finito, I un intervalo cerrado y n un natural con $n \geq 1$. Entonces existe un intervalo cerrado $J \subseteq I$ tal que $F \cap J = \emptyset$ y la longitud de J es menor que $\frac{1}{n}$.*

Demostración: Sea $I = [a, b]$, $F = \{c_1, c_2, \cdots, c_m\}$ un conjunto finito y $n \geq 1$. Podemos suponer que $a \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_m \leq b$ (¿por qué?). Entonces escojamos a', b' tales que $c_1 < a' < b' < c_2$ y además $b - a < \frac{1}{n}$. Sea $J = [a', b']$. Dejamos como ejercicio verificar que J satisface la conclusión del lema.

□

Teorema 5.64. $\mathbb{R}$ *no es numerable.*

Demostración: Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ un función cualquiera. Mostraremos que f no es sobreyectiva construyendo un real z que no está en el rango de f. Esto mostrará que no existe una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$.

Definiremos una sucesión de intervalos cerrados I_n tales que

(i) $f(n) \notin I_n$ para todo n.

(ii) $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo n.

(iii) La longitud de I_n es menor que $\frac{1}{n+1}$.

Sea I_0 un intervalo cerrado tal que $f(0) \notin I_0$ y la longitud de I_0 es menor que 1. Supongamos que hemos definido I_k para todo $k \leq n$ tal que (i), (ii) y (iii) se cumplen. Por el lema 5.63 sabemos que existe un intervalo cerrado $J \subseteq I_n$ tal que $f(n+1) \notin J$ y la longitud de J es menor que $\frac{1}{n+1}$. Sea $I_{n+1} = J$.

Es claro que esta sucesión de intervalos cerrados satisface las hipótesis del teorema 5.62. Sea entonces $z \in \mathbb{R}$ tal que $z \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la condición (i) de la construcción de los intervalos sabemos que $f(m) \neq z$ para todo m. Esto muestra que z no pertenece al rango de f.

□

El siguiente resultado muestra que existen muchos más números irracionales que racionales.

Teorema 5.65. *El conjunto de los números irracionales no es numerable.*

Demostración: En efecto, supongamos por reducción al absurdo que $\mathbb{I}$ es numerable. Como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, entonces $\mathbb{R}$ es numerable, al ser la unión de dos conjuntos numerables. Y esto es un contradicción.

□

En algunas circunstancias el conocer la cardinalidad de un conjunto da indirectamente información interesante sobre el conjunto. Ilustraremos lo que acabamos de decir con un ejemplo.

Ejemplo 5.66. *(Números algebraicos y trascendentes)* Un número real r se dice que es *algebraico* si existe un polinomio $p(x)$ con coeficientes racionales tal que $p(r) = 0$. En otras palabras, los números algebraicos son aquellos números reales que son una raíz de un polinomio con coeficientes racionales. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es algebraico, pues es una raíz de $x^2 - 2$. De igual forma $\sqrt[3]{5}$ también es algebraico. El lector se puede convencer que $\sqrt[n]{q}$ es algebraico para todo racional positivo q y todo natural $n \geq 2$.

Sea A la collección de todos los números reales algebraicos. Vemos entonces que $\mathbb{Q} \subseteq A$ pero también sabemos que A contiene además números irracionales.

Ahora bien, ¿cuál es la cardinalidad de A?, ¿Es $A = \mathbb{R}$? Daremos algunas indicaciones de cómo responder estas preguntas. Consideremos el siguiente conjunto

$$\mathbb{Q}[x] = \{p : \ p \text{ es un polinomio con coeficientes en } \mathbb{Q}\}.$$

El conjunto $\mathbb{Q}[x]$ es numerable. La idea para mostrar esto último es la siguiente. Considere los conjuntos

$$\mathbb{Q}_n[x] = \{p \in \mathbb{Q}[x] : \ p \text{ es un polinomio de grado menor o igual a } n\}.$$

Tenemos entonces que

$$\mathbb{Q}[x] = \bigcup_n \mathbb{Q}_n[x].$$

Bastaría entonces mostrar que cada $\mathbb{Q}_n[x]$ es numerable. Por ejemplo, para ver que $\mathbb{Q}_2[x]$ es numerable, observemos que un polinomio $p \in \mathbb{Q}_2[x]$ tiene la forma

$$p(x) = a + bx$$

con $a, b \in \mathbb{Q}$. Ahora bien, notemos que si $(a, b) \neq (a', b')$, entonces los polinomios $a + bx$ y $a' + b'x$ son diferentes. Por lo tanto tenemos que la función

$$(a, b) \mapsto a + bx$$

es biyectiva. Esto muestra que $\mathbb{Q}_2[x]$ es numerable. De manera similar se puede mostrar que $\mathbb{Q}_n[x]$ también es numerable.

Continuando con la demostración de que A es numerable, considere, para cada $p \in \mathbb{Q}[x]$, el conjunto

$$R_p = \{r \in \mathbb{R} : \ p(r) = 0\}.$$

Es decir R_p consiste de las raíces de p. Como cada polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces tenemos entonces que para cada polinomio p el conjunto R_p es finito. Es fácil convencerse que

$$A = \bigcup_{p \in \mathbb{Q}[x]} R_p.$$

Luego como $\mathbb{Q}[x]$ es numerable y cada R_p es finito entonces $|A| \leq |\mathbb{N}|$. Pero ya vimos antes que $|\mathbb{N}| \leq |A|$. Por lo tanto A es numerable.

El hecho que A es numerable y que $\mathbb{R}$ no lo es garantiza que $\mathbb{R} \setminus A$ tampoco es numerable. En efecto, razonando indirectamente, vemos que si $\mathbb{R} \setminus A$ fuese numerable, entonces $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus A) \cup A$ también lo sería (por ser la unión de dos conjuntos numerables) y esto es una contradicción. Con esto hemos mostrado que existen reales que no son algebraicos.

Los reales que pertenecen a $\mathbb{R} \setminus A$ se llaman *trascendentes*. Vemos entonces que hay más reales trascendentes que algebraicos. ¿Puede el lector dar un ejemplo de un real trascendente? Esta pregunta no es sencilla. El matemático francés Joseph Liouville (1809-1882) fué quien por primera vez mostró que existían números trascendentes (el argumento que dimos arriba, basado en la cardinalidad de los conjuntos, se debe a Cantor y es posterior). Algunos ejemplos de números transcendentes son e y π. Entre los que consigió Liouville tenemos el siguiente:

$$0,1010010000000100000000000000000000000010 \cdots 10 \cdots$$

Donde el número de ceros entre dos unos consecutivos es $n!$.

□

Ejercicios 5.9

1. Considere la siguiente colección $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos cerrados:

$$I_n = \left[\frac{3n+1}{2n+2}, \frac{3n+4}{2n+2}\right]$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Halle el real z tal que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{z\}.$$

2. Considere los siguientes conjuntos donde $n \in \mathbb{N}$:
$$A_n = \left[-\frac{1}{n+1},\ \frac{1}{n+1}\right] \cup \left[1-\frac{1}{n+1},\ 1+\frac{1}{n+1}\right].$$
Muestre que
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0,1\}.$$

3. Muestre que
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n,+\infty) = \emptyset.$$

4. Muestre que
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0,\ \frac{1}{n+1}\right) = \emptyset.$$

5. Muestre que
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[0,\ 1+\frac{1}{n+1}\right] = [0,1].$$

6. Muestre que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ no es numerable.

7. Sea $A = \{q \in \mathbb{Q} :\ q^2 < 2\}$. Muestre que $\mathbb{R}\setminus A$ no es numerable.

8. Muestre que $\mathbb{R}^2$ no es numerable.

9. Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in \mathbb{Q}\}$. Muestre que A no es numerable.

10. Muestre que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x, y$ son irracionales$\}$ no es numerable.

11. Muestre que $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$ no es numerable.

12. Muestre que $\mathbb{R}^3$ no es numerable.

13. Muestre que $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$ no es numerable.

14. Diremos que una función $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es **eventualmente constante** si existen $m, a \in \mathbb{N}$ tales que
$$f(n) = a \text{ para todo } n \geq m.$$
Por ejemplo, sea $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dada por $f(0) = 15$, $f(1) = 35$ y $f(n) = 3$ si $n \geq 2$. Entonces f es eventualmente constante. Por otra parte, la función $f(n) = n+2$ para $n \in \mathbb{N}$ no es eventualmente constante.

Sea A la colección de funciones que son eventualmente constantes. Muestre que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus A$ no es numerable.

15. Muestre que el siguiente conjunto es numerable para cada entero positivo n.
$$\mathbb{Q}_n[x] = \{p \in \mathbb{Q}[x] :\ p \text{ es un polinomio de grado menor o igual a } n\}.$$

5.10. ¿Cuál es el tamaño de $\mathbb{R}$?

En esta sección daremos algunas indicaciones para mostrar la siguiente afirmación

$$|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|. \tag{5.5}$$

Es decir, que hay tantos números reales como subconjuntos de $\mathbb{N}$. Para demostrar esta igualdad bastaría mostrar (gracias al teorema de Schröder-Bernstein) que

$$|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \quad \text{y} \quad |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|.$$

La primera desigualdad no es difícil de probar. Para la segunda usaremos la representación decimal de los números reales, que aunque no la hemos desarrollado en este curso el lector la conoce al menos de manera intuitiva.

Ya vimos en el ejemplo 5.56 que

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

es decir, hay tantos subconjuntos de $\mathbb{N}$ como funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. Entonces (5.5) dice que hay tantos números reales como funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. Esto es hasta cierto punto bastante intuitivo, pues cada número real se puede expresar en forma decimal, es decir, como un entero seguido de un sucesión (posiblemente) infinita de números naturales. Esta representación sugiere que existe una relación natural entre números reales y funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.

Mostraremos a continuación que el tamaño de $\mathbb{R}$ no sobrepasa el tamaño de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Teorema 5.67. $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Demostración: Hemos visto que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ y también sabemos que $|\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ (ver el ejercicio 9 de §5.2). Así que basta mostrar que $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})|$. Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ de la manera siguiente:

$$f(r) = \{q \in \mathbb{Q} : \ q < r\}.$$

Mostraremos que f es inyectiva. En efecto, sean $r, r' \in \mathbb{R}$ dos reales cualesquiera con $r \neq r'$. Podemos suponer que $r < r'$ (el otro caso se analiza de manera análoga). Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ existe un racional q tal que $r < q < r'$. Por lo tanto $q \in f(r')$ pero $q \notin f(r)$. En consecuencia $f(r) \neq f(r')$.

□

La otra desigualdad, $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$, es un poco más difícil de mostrar. Tenemos que asociar a cada subconjunto de $\mathbb{N}$ un número real. Para lograr ésto usaremos la representación decimal de los número reales. Tomemos un número real r tal que $0 \leq r \leq 1$. La representación decimal de r es una sucesión a_n de enteros no negativos que usualmente se escribe de la manera siguiente

$$0, a_0, a_1 a_2 \cdots, a_n, \cdots$$

A cada subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ le asociamos la siguiente sucesión

$$a_n = \begin{cases} 1 & , \text{si } n \in A \\ 0 & , \text{si } n \notin A. \end{cases}$$

Definimos $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$f(A) = \text{el número real cuya expansión decimal viene dada por la sucesión } a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \cdots, \text{ definida arriba.}$$

Mostraremos que f es inyectiva. Sean A, B dos subconjuntos de $\mathbb{N}$ diferentes. Ya que $A \triangle B \neq \emptyset$, denotaremos con m al primer natural que pertenece a $A \triangle B$. Observe que para todo $i < m$ se tiene que

$$i \in A \Leftrightarrow i \in B. \tag{5.6}$$

Tenemos que considerar dos casos: $m \in A - B$ ó $m \in B - A$. Los dos casos son análogos y analizaremos sólo uno de ellos. Supongamos entonces que $m \in A - B$. Para simplificar la notación llamaremos r al número real $f(A)$ y s a $f(B)$. Mostraremos que $r \neq s$. Sea a_n y b_n los dígitos correspondientes a la representación decimal de $f(A)$ y $f(B)$ respectivamente. Entonces para todo $i < m$ se cumple que

$$a_i = 0 \Leftrightarrow b_i = 0. \tag{5.7}$$

Definimos un racional q de la siguiente manera

$$q = 0, a_0, a_1 a_2 \cdots, a_m.$$

Observe que $a_m = 1$ y $b_m = 0$. Por (5.7) sabemos que

$$s < q \leq r$$

por lo tanto $r \neq s$.

$\square$

Hasta ahora hemos mostrado ejemplos de subconjuntos de $\mathbb{R}$ de tres tamaños: finitos, numerables y aquellos de igual tamaño que $\mathbb{R}$. Una pregunta que ha cautivado la atención de muchos matemáticos es si existe algún subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|.$$

Esta pregunta de apariencia tan sencilla fué estudiada por Cantor, quien pensaba que la respuesta era negativa, es decir, que no existe un conjunto A con esa característica (esta alternativa se conoce como la *Hipótesis del Continuo*). En la actualidad se sabe mucho más acerca de esta pregunta que en la época de Cantor, sin embargo, todavía esta pregunta es objeto de profundos y complejos trabajos de investigación.

Ejercicios 5.10.

1. Muestre las siguientes afirmaciones:

   a) $\mathbb{R} \approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

   b) $\mathbb{R} \approx \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   c) $\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^n$ donde n es un entero positivo.

   d) $(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

   e) $\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

5.11. ¿Cómo se construyen los reales?

En esta sección comentaremos cómo se construyen matemáticamente los números reales. Para apreciar mejor las ideas que presentaremos nos parece conveniente mostrar primero la construcción de los racionales. Toda construcción parte necesariamente de alguna "materia prima". En nuestro caso, para construir los racionales, usaremos como materia prima los números enteros. Después, para construir los reales usaremos como materia prima a los racionales.

5.11.1. Construcción de $\mathbb{Q}$.

La definición que hemos usado de número racional dice que un racional es una expresión de la forma $\frac{m}{n}$ donde n y m son enteros con $n \neq 0$. Por otra parte, sabemos que dos fracciones diferentes pueden representar al mismo número racional, por ejemplo, $\frac{3}{6}$ y $\frac{1}{2}$ son fracciones equivalentes y representan al mismo número (¿cuál?) La construcción de $\mathbb{Q}$ que daremos se basa en la idea de fracciones equivalentes.

Consideremos el conjunto de pares ordenados

$$\{(m,n) :\ n,m \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}.$$

Este conjunto es precisamente

$$\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}).$$

Cada fracción $\frac{m}{n}$ la "identificaremos" con el par (m,n) de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. La noción de fracción equivalente nos da un relación de equivalencia en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. En efecto, definimos la relación binaria $\sim$ de la manera siguiente: Sean $(m,n), (p,q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$

$$(m,n) \sim (p,q) \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad mq = np. \tag{5.8}$$

Por ejemplo: $(1,2) \sim (3,6)$, $(-3,4) \sim (3,-4)$, $(4,2) \sim (2,1)$.

La relación $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Es decir, $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva. En efecto,

(i) es obvio que $(m,n) \sim (m,n)$ para todo $(m,n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ y por lo tanto $\sim$ es una relación reflexiva.

(ii) Si $(m,n) \sim (p,q)$, entonces $mq = np$. Luego $pn = qm$ y por lo tanto $(p,q) \sim (m,n)$. Es decir, $\sim$ es simétrica.

(iii) Supongamos que $(m,n) \sim (p,q)$ y además que $(p,q) \sim (r,s)$. Entonces tenemos que $mq = np$ y $ps = qr$. Multiplicando la primera igualdad por s y la segunda por n obtenemos que $mqs = nps$ y $nps = nqr$. En consecuencia $mqs = nqr$. Como $q \neq 0$ (¿por qué?), entonces podemos cancelar q y obtenemos $ms = nr$, es decir, $(m,n) \sim (r,s)$. Esto muestra que $\sim$ es transitiva.

La relación de equivalencia $\sim$ parte al conjunto $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ en clases de equivalencia. Por ejemplo, la clase de equivalencia del par ordenado $(1, 2)$ es

$$\begin{aligned}
[(1,2)] &= \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : \ (1,2) \sim (m,n)\} \\
&= \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : \ n = 2m\} \\
&= \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : \ \tfrac{m}{n} = \tfrac{1}{2}\}.
\end{aligned}$$

Vemos entonces que la clase de equivalencia de $(1, 2)$ corresponde a la colección de todas las fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$. Ahora podemos dar una definición más precisa de los números racionales

Definición 5.68. *Los números racionales son el conjunto cociente dado por la relación $\sim$ sobre el conjunto $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definida en 5.8. En símbolos,*

$$\mathbb{Q} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) / \sim .$$

En otras palabras, un número racional es una clase de equivalencia con respecto a $\sim$. Por esta razón decimos que las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$ *representan* al mismo número racional, pues son representantes de la misma clase de equivalencia.

Para completar la construcción de $\mathbb{Q}$ debemos definir las operaciones de suma y multiplicación. Teniendo presente que el par ordenado (m, n) representa la fracción $\frac{m}{n}$ es fácil imaginar cuales son las definiciones correctas. Ya que un número racional es una clase de equivalencia, la suma y la multiplicación deben estar definidas entre clases de equivalencia. Para motivar la definición de suma y multiplicación de las clases de equivalencia recordemos la manera usual de sumar y multiplicar fracciones. Por ejemplo,

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 5 + 3 \cdot 3}{2 \cdot 5}$$

y

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5}.$$

Este ejemplo sugiere la siguiente definición:

$$\begin{aligned}
[(m,n)] \quad + \quad [(p,q)] &\stackrel{\mathrm{def}}{=} [(m \cdot q + n \cdot p, n \cdot q)] \\
[(m,n)] \quad \cdot \quad [(p,q)] &\stackrel{\mathrm{def}}{=} [(m \cdot p, n \cdot q)].
\end{aligned}$$

Debemos también definir el elemento neutro de la suma y de la multiplicación. Claramente el 0 de $\mathbb{Q}$ corresponde a las fracciones de la forma $\frac{0}{n}$ y el 1 de $\mathbb{Q}$ corresponde a las fracciones de la forma $\frac{m}{m}$. Esto sugiere la siguiente definición:

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{\mathrm{def}}{=} [(0,1)] \\
1 &\stackrel{\mathrm{def}}{=} [(1,1)].
\end{aligned}$$

Ahora debemos dar la definición de los inversos aditivos y multiplicativos.

$$-[(m,n)] \stackrel{def}{=} [(-m,n)]$$

$$([(p,q)])^{-1} \stackrel{def}{=} [(q,p)]$$

donde $[(p,q)] \neq 0$, es decir, $p,q \neq 0$. Por último definimos los racionales positivos $\mathbb{Q}^+$.

$$\mathbb{Q}^+ \stackrel{def}{=} \{[(m,n)] : \ m \cdot n > 0\}.$$

Queda por verificar que los postulados **P1**,..., **P12** se satisfacen. Esta es una tarea un poco tediosa y no la haremos. Lo que pretendíamos al presentar la construcción de $\mathbb{Q}$ era simplemente mostrarle al lector el método usado en Matemáticas para formalizar de manera lógica el concepto de número racional.

5.11.2. Construcción de $\mathbb{R}$.

Los números racionales serán nuestra materia prima para construir los números reales. La idea fundamental que usaremos para hacer la construcción tiene como objetivo lograr, por supuesto, que $\mathbb{R}$ satisfaga el axioma del supremo y además que los racionales sean densos en $\mathbb{R}$.

Usaremos el método ideado por Dedekind conocido como las *cortaduras de Dedekind.*

Definición 5.69. *Una* ***cortadura*** *es un conjunto α de racionales con las siguientes cuatro propiedades*

(i) *Si $q \in \alpha$ y r es un número racional con $r < q$, entonces $r \in \alpha$.*

(ii) $\alpha \neq \emptyset$.

(iii) $\alpha \neq \mathbb{Q}$.

(iv) *No existe ningún elemento máximo en α; es decir, si $q \in \alpha$, entonces existe $r \in \alpha$ tal que $q < r$.*

Ejemplo 5.70. Un ejemplo sencillo de cortadura es el siguiente

$$\alpha = \{q \in \mathbb{Q} : q < 4\}.$$

En efecto, verifiquemos las cuatro condiciones que definen una cortadura

(i) Es claro que si $q \in \alpha$ y $r < q$, entonces $r \in \alpha$.

(ii) $\alpha \neq \emptyset$ pues por ejemplo $3 \in \alpha$.

(iii) $5 \notin \alpha$ luego $\alpha \neq \mathbb{Q}$.

(iv) Si $q < 4$, entonces $q < \frac{q+4}{2} < 4$. Por consiguiente, α no tiene máximo.

□

El ejemplo anterior sugiere una manera de definir cortaduras. Dado un racional cualquiera r definimos

$$r^* = \{q \in \mathbb{Q} : \ q < r\}.$$

Dejamos como ejercicio al lector verificar que para todo racional r el conjunto r^* es una cortadura (ver ejercicio 1). La cortadura r^* "representará" al racional r. Pero hay muchas otras cortaduras que no son de esa forma.

La condición (iv) en la definición de cortadura se necesita para evitar ambigüedades. Por ejemplo

$$\{q \in \mathbb{Q} : q < 1\}$$

$$\{q \in \mathbb{Q} : q \leq 1\}$$

podrían ambos representar al número 1. Otro ejemplo mas interesante de cortadura es el siguiente:

$$\alpha = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq 0 \text{ ó } q > 0 \text{ y } q^2 < 2\}.$$

Es fácil ver que las condiciones (i), (ii) y (iii) de la definición de cortadura son satisfechas por α. La condición (iv) requiere de un poco mas de trabajo que dejamos como ejercicio (ver ejercicio 2). Esta cortadura representa a $\sqrt{2}$.

Trabajaremos con diferentes objetos: números racionales, cortaduras (conjuntos de números racionales) y eventualmente también con colecciones de cortaduras (es decir, colecciones de conjuntos de racionales). Para evitar confusiones, usaremos las letras minúsculas del alfabeto latino (p, q, r,...) para denotar racionales, las del alfabeto griego (α, β, γ, ...) para denotar cortaduras y las letras latinas mayúsculas (A,B, C, ...) para denotar colecciones de cortaduras.

La definición de número real que damos a continuación es el concepto mas complejo tratado en estas notas.

Definición 5.71.

$$\mathbb{R} = \{\alpha : \alpha \ \textit{ es una cortadura}\}.$$

□

Ahora veremos cómo definir las operaciones de suma y multiplicación de cortaduras y la relación de orden. Pero antes de hacerlo, observemos que de la definición de cortadura se obtiene naturalmente la noción de igualdad: Dos cortaduras α y β son iguales si $\alpha \subseteq \beta$ y $\beta \subseteq \alpha$.

Definición 5.72. *Sean α y β cortaduras.*

$$\alpha + \beta = \{p + q : p \in \alpha \ y \ \ q \in \beta\}.$$

□

Para ilustrar cómo se trabaja con las cortaduras verificaremos a continuación que $\alpha + \beta$ es una cortadura.

Proposición 5.73. *Sean α y β cortaduras. Entonces $\alpha+\beta$ es una cortadura.*

Demostración: Veamos que $\alpha+\beta$ satisface las cuatro condiciones que definen a una cortadura.

(i) Supongamos que $y < x$ son racionales y $x \in \alpha+\beta$. Entonces $x = p+q$ con $p \in \alpha$ y $q \in \beta$. Luego $y < p+q$, y por lo tanto $y-q < p$. Como α es una cortadura, entonces $y-q \in \alpha$. De esto se obtiene que $y = p+(y-p)$ pertenece a $\alpha+\beta$.

(ii) Es claro que $\alpha+\beta \neq \emptyset$.

(iii) Sean x, y racionales tales que $x \notin \alpha$ y $y \notin \beta$. Notemos que para todo $a \in \alpha$ se cumple que $a < x$ (si para algún a en α no se tuviera que $a < x$, entonces $x \leq a$ y por la condición (i) de 5.69 tendríamos que $x \in \alpha$). De manera similar tenemos que para todo $b \in \beta$ se tiene que $b < y$. Luego $a+b < x+y$ para todo a en α y todo b en β. Por lo tanto $x+y$ no se puede escribir como $a+b$ con a en α y b en β, esto es, $x+y$ no está $\alpha+\beta$.

(iv) Sea $p+q$ en $\alpha+\beta$ con p en α y q en β. Por ser α y β cortaduras, existen p' en α y q' en β tales que $p < p'$ y $q < q'$. Por lo tanto $p+q < p'+q'$ y claramente $p'+q'$ está en $\alpha+\beta$.

□

Ahora definiremos el cero. Para no confundirlo con el cero de $\mathbb{Q}$, lo denotaremos por 0^*. La definición es muy natural.

Definición 5.74.

$$0^* = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}.$$

□

Definiremos a continuación el inverso aditivo. Consideremos la siguiente cortadura

$$\alpha = \{q \in \mathbb{Q} : q < 3\}.$$

Observemos que

$$\{q \in \mathbb{Q} : q \notin \alpha\} = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 3\}$$

y por otra parte

$$\{q \in \mathbb{Q} : q \leq -3\} = \{q \in \mathbb{Q} : -q \notin \alpha\}.$$

Observemos que -3 es el mínimo de $\{q \in \mathbb{Q} : q \notin \alpha\}$. Este ejemplo sugiere la definición siguiente

Definición 5.75. *Sea α una cortadura.*

$$-\alpha = \{-q \in \mathbb{Q} : q \notin \alpha \text{ y } q \text{ no es el elemento mínimo de } \{r \in \mathbb{Q} : r \notin \alpha\}\}.$$

□

Ejemplo 5.76. Veamos un ejemplo:

$$\alpha = \{r \in \mathbb{Q} : r < -4\}.$$

Usando la notación introducida anteriormente, α es igual a $(-4)^*$. Determinaremos a continuación $-\alpha$. Primero notemos que

$$\{r \in \mathbb{Q} : r \notin \alpha\} = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq -4\}.$$

Observemos que el mínimo de este conjunto es -4, de modo que

$$-\alpha = \{q \in \mathbb{Q} : -q \geq -4 \ \& \ -q \neq -4\}$$

es decir

$$-\alpha = \{q \in \mathbb{Q} : q < 4\}.$$

□

Podemos ahora definir $\mathbb{R}^+$ el conjunto de cortaduras que representarán los números reales positivos.

Definición 5.77.

$$\mathbb{R}^+ = \{\alpha : \alpha \textit{ es una cortadura que contiene algún racional positivo}\}.$$

El orden entre las cortaduras es muy simple de caracterizar. Recordemos que $<$ se define a partir de $\mathbb{R}^+$ de la siguiente manera: Sean α y β cortaduras

$$\alpha < \beta, \ \text{ si } \ \alpha + (-\beta) \in \mathbb{R}^+.$$

En principio esta relación $<$ pudiera parecer compleja, sin embargo veremos a continuación que es de hecho equivalente a una relación bien conocida entre conjuntos.

Teorema 5.78. *Sean α y β cortaduras. $\alpha < \beta$ si y sólo si $\alpha \subset \beta$ y $\alpha \neq \beta$. Además, $\alpha \leq \beta$ si y sólo si $\alpha \subseteq \beta$.* □

A continuación mostraremos que toda colección de cortaduras acotada superiormente tiene supremo.

Teorema 5.79. *(El axioma de completitud) Si A es una colección no vacía de cortaduras acotada superiormente, entonces A tiene supremo.*

Demostración: Sea A un colección no vacía de cortaduras y α una cota superior para A. Sea

$$\beta = \{x \in \mathbb{Q} : x \text{ pertenece a alguna de las cortaduras de } A\}.$$

Mostraremos que β es una cortadura y que es el supremo de A.

(i) Sea $x \in \beta$ y $y < x$. De la definición de β tenemos que existe $\gamma \in A$ tal que $x \in \gamma$. Luego $y \in \gamma$ y por lo tanto $y \in \beta$.

(ii) Como A no es vacío entonces $\beta \neq \emptyset$.

(iii) Sea x un racional que no pertenece a α. Veremos que x no pertenece a β. Sea γ una cortadura en A, entonces por ser α una cota superior de A se tiene que $\gamma \leq \alpha$. Por 5.78 sabemos que esto significa que $\gamma \subseteq \alpha$, por lo tanto $x \notin \gamma$.

(iv) Sea $x \in \beta$ y $\gamma \in A$ tal que $x \in \gamma$. Entonces existe un racional $y \in \gamma$ tal que $x < y$. Es claro que $y \in \beta$.

(v) Es claro que para todo $\gamma \in A$, se cumple que $\gamma \leq \beta$. Por lo tanto β es una cota superior de A. Veamos que β es la menor de las cotas superiores de A. Sea δ otra cota superior de A. Entonces $\gamma \subseteq \delta$ para todo $\gamma \in A$. Por lo tanto si $x \in \beta$, se tiene que $x \in \delta$, es decir, $\beta \subseteq \delta$. Y por consiguiente $\beta \leq \delta$.

□

La definición del producto la haremos por partes. Comenzaremos definiendo el producto de cortaduras para las cortaduras "positivas", es decir las cortaduras que están en $\mathbb{R}^+$.

Definición 5.80. *Sean α y β cortadura, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Definimos $\alpha \cdot \beta$ de la siguiente manera*

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta \;\; = \;\; & \{z \in \mathbb{Q} : z \leq 0\} \;\cup \\ & \{z \in \mathbb{Q} : \;\; z = xy \textit{ para algún } x, y \textit{ con } x \in \alpha,\ y \in \beta \textit{ y } x, y > 0\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.81. Veamos un ejemplo. Consideremos las cortaduras 2^* y 3^*.

$$2^* = \{q \in \mathbb{Q} : \; q < 2\}$$

y

$$3^* = \{q \in \mathbb{Q} : \; q < 3\}.$$

Mostraremos que $2^* \cdot 3^* = 6^*$. Debemos mostrar dos cosas

(i) $2^* \cdot 3^* \subseteq 6^*$: Sea $q \in 2^* \cdot 3^*$. Hay dos casos posibles. El primero es que $q \leq 0$, entonces es claro que $q < 6$ y por lo tanto $q \in 6^*$. El segundo caso es que $q = xy$ para algún par de racionales x, y tales que $x \in 2^*$, $y \in 3^*$ y $x, y > 0$. En este caso tenemos que $0 < x < 2$ y $0 < y < 3$. Por lo tanto $0 < xy < 6$ y esto muestra que $q \in 6^*$.

(ii) $6^* \subseteq 2^* \cdot 3^*$: Sea $q \in 6^*$, es decir, q es un racional y $q < 6$. Hay dos casos a considerar. El primero es si $q \leq 0$, en este caso $q \in 2^* \cdot 3^*$ por definición de producto de cortaduras. El segundo caso es cuando $q > 0$. Como $0 < q < 6$ entonces $1 < \frac{6}{q}$. Sea r un racional tal que $1 < r < \frac{6}{q}$ y sea $x = \frac{2}{r}$. Entonces $0 < x < 2$, es decir $x \in 2^*$. Sea $y = q \cdot \frac{1}{x}$, es decir, $y = qr/2$. Como $q < qr < 6$, entonces $qr/2 < 3$, es decir $y \in 3^*$. Finalmente es claro que como $q = xy$, entonces $q \in 2^* \cdot 3^*$.

□

Para completar la definición de la operación de multiplicación es conveniente tener a nuestra disposición el concepto de valor absoluto.

Definición 5.82. *Sea α una cortadura*

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & si\ \alpha \geq 0^* \\ -\alpha, & si\ \alpha \leq 0^*. \end{cases}$$

Definición 5.83.

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} 0^*, & si\ \alpha = 0^*\ o\ \beta = 0^* \\ |\alpha| \cdot |\beta|, & si\ \alpha > 0^*\ y\ \beta > 0^* \quad o \quad \alpha < 0^*\ y\ \beta < 0^* \\ -(|\alpha| \cdot |\beta|), & si\ \alpha > 0^*\ y\ \beta < 0^* \quad o \quad \alpha < 0^*\ y\ \beta > 0^*. \end{cases}$$

Ya el lector se habrá convencido que la construcción de los reales no es cosa sencilla. Para finalizar, daremos la definición del inverso multiplicativo.

Definición 5.84. $1^* = \{q \in \mathbb{Q} : q < 1\}$.

Definición 5.85. *Sea α una cortadura con $\alpha \neq 0^*$. Si $\alpha > 0^*$, entonces*

$$\begin{array}{rcl} \alpha^{-1} & = & \{q \in \mathbb{Q} :\ q \leq 0\}\ \cup \\ & & \{1/q \in \mathbb{Q} :\ q > 0\ y\ q \notin \alpha\ y\ q\ no\ es\ el\ mínimo\ de\ \{r \in \mathbb{Q} : r \notin \alpha\}\}. \end{array}$$

Si $\alpha < 0^*$, entonces

$$\alpha^{-1} = -(|\alpha|^{-1}).$$

Ejercicios 5.11

1. Muestre que r^* es una cortadura para cada racional r.

2. Considere los conjuntos

$$\begin{array}{rl} A = & \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 0 \text{ ó } 0 < r \text{ y } r^2 < 2\} \\ B = & \{s \in \mathbb{Q} : 0 < s \text{ y } s^2 > 2\}. \end{array}$$

   Muestre que

   (i) A no tiene máximo y que B no tiene mínimo.

   (ii) Para todo $r \in A$ y todo $s \in B$, $r < s$.

   (iii) $\mathbb{Q} = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$.

   (iv) A es una cortadura.

   (*Sugerencia:* Para la parte (i) use el ejercicio 3 de §2.4 en el capítulo 1).

3. Sea

$$\alpha = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 0 \text{ ó } 0 < r \text{ y } r^2 < 5\}.$$

   Muestre que α es una cortadura. (*Sugerencia:* Use el ejercicio 5 de §2.4 del capítulo 1).

4. Dados dos racionales r, s muestre que

a) $(r+s)^* = r^* + s^*$.

b) $(rs)^* = r^* \cdot s^*$.

c) $r^* < s^*$ si y sólo si $r < s$.

5. Si α y β son cortaduras tales que $\alpha < \beta$, entonces existe un racional r tal que $\alpha < r^* < \beta$.

6. Sea α una cortadura. Muestre que $r \in \alpha$ si y sólo si $r^* < \alpha$.

7. Sean α y β cortaduras. Muestre que $\alpha \cup \beta$ y $\alpha \cap \beta$ son cortaduras.

8. Sea α una cortadura diferente de 0^*. Daremos algunas indicaciones para mostrar que
$$1^* = \alpha \cdot \alpha^{-1}$$
Muestre primero que $\alpha \cdot \alpha^{-1} \subseteq 1^*$.

Para la otra dirección siga los siguientes pasos.

a) Muestre que, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $\alpha > 0$

b) Podemos también suponer que $\alpha \neq r^*$ para $r \in \mathbb{Q}$.
En efecto, note que para $r \in \mathbb{Q}$ con $r > 0$ se tiene que
$$(r^*)^{-1} = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : \ x = 1/y \ , \ y \in \mathbb{Q} \ , \ y > r\}$$
Sea $0 < s < 1$ un racional cualquiera. Sea
$$t = r\left(\frac{1-s}{1+s}\right)$$
entonces $r - t \in r^*$, $1/(r+t) \in (r^*)^{-1}$ y además
$$s = \frac{r-t}{r+t}$$

c) En lo que sigue supondremos que $\alpha > 0$ y α no es de la forma r^* con $r \in \mathbb{Q}$.

d) Muestre que para todo racional $r > 1$, existe $a \in \alpha$ tal que $ra \notin \alpha$. Además, como α no es de la forma r^*, entonces ra no es el mínimo de $\mathbb{Q} \setminus \alpha$ (pues este conjunto no tiene mínimo).
Sugerencia: Sea $a \in \alpha$ con $a > 0$. Observe que
$$a < ra < r^2 a < \cdots < r^n a < \cdots$$
Use que $\{r^n : \ n \in \mathbb{N}\}$ no es acotado superiormente en $\mathbb{Q}$ y concluya que existe n tal que $r^n a \notin \alpha$.

e) Sea $0 < s < 1$ un racional y sea $r = 1/s$. Fije $a \in \alpha$ tal que $ra \notin \alpha$. Entonces
$$s = a \cdot (ra)^{-1} \in \alpha \cdot \alpha^{-1}.$$

Índice alfabético

Bibliografía

[1] P. S. Alexandroff. *Introducción a la teoría de los grupos.* Eudeba, Buenos Aires, Argentina, 1965.

[2] I. N. Herstein. *Álgebra Moderna.* Editorial Trillas, Mexico, 1976.

[3] M. Spivak. *Calculus. Tomos I y II.* Editorial Reverté S. A., España, 1978.

[4] K. Stromberg. *An Introduction to Classical Real Analysis.* Wadsworth, Inc., USA, 1981.